TUGAS AKHIR - SM141501

IMPLEMENTASI MODEL TINGKAT SUKU BUNGA COX INGERSOLL ROSS (CIR) UNTUK MENENTUKAN IURAN NORMAL PENSIUN PROGRAM MANFAAT PASTI

ZEBRILIA DWI NASTITI
NRP 1211 100 034

Dosen Pembimbing:
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Subchan, Ph.D

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015

FINAL PROJECT - SM141501

IMPLEMENTATION OF CIR INTEREST RATE MODELS TO DETERMINE NORMAL PENSION CONTRIBUTION IN ACCRUED BENEFIT COST METHOD

ZEBRILIA DWI NASTITI
NRP 1211 100 034

Supervisors:
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Subchan, Ph.D

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015

LEMBAR PENGESAHAN

IMPLEMENTASI MODEL TINGKAT SUKU BUNGA COX INGERSOLL ROSS (CIR) UNTUK MENENTUKAN IURAN NORMAL PENSIUN PROGRAM MANFAAT PASTI

IMPLEMENTATION OF CIR INTEREST RATE MODELS TO DETERMINE NORMAL PENSION CONTRIBUTION IN ACCRUED BENEFIT COST METHOD

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
ZEBRILIA DWI NASTITI
NRP. 1211 100 034

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Subchan, Ph.D	Endah Rokhmati M.P., Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001	NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

Surabaya, Juli 2015

IMPLEMENTASI MODEL TINGKAT SUKU BUNGA COX INGERSOLL ROSS (CIR) UNTUK MENENTUKAN IURAN NORMAL PENSIUN PROGRAM MANFAAT PASTI

Nama Mahasiswa	:	Zebrilia Dwi Nastiti
NRP	:	1211 100 034
Jurusan	:	Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing	:	1. Endah Rokhmati M.P., Ph.D
		2. Subchan, Ph.D

Abstrak

Program pensiun merupakan salah satu program yang menjamin kesejahteraan pegawai. Selama ini, perhitungan iuran pensiun menggunakan asumsi tingkat suku bunga tetap sepanjang waktu. Asumsi ini tidak menggambarkan keadaan sebenarnya. Oleh karena itu, Tugas Akhir ini membahas mengenai asumsi tingkat suku bunga yang menggambarkan keadaan sebenarnya. Model tingkat suku bunga yang digunakan adalah model Cox Ingersoll Ross (CIR). Tugas Akhir ini membahas mengenai implementasi model CIR dalam mengaproksimasi tingkat suku bunga dan menerapkannya untuk menentukan iuran normal pensiun. Data yang digunakan untuk implementasi adalah data BI Rate dan data dari PT. Taspen (Persero). Hasil implementasi menunjukkan bahwa aproksimasi tingkat suku bunga model CIR memiliki pola yang hampir sama dengan tingkat suku bunga di pasar dengan data yang fluktuasinya tidak terlalu besar. Untuk implementasi model CIR pada iuran normal pensiun menunjukkan bahwa iuran normal dengan tingkat suku bunga model CIR cenderung lebih besar dibandingkan dengan iuran normal dengan tingkat suku bunga tetap.

Kata-kunci: *CIR, Tingkat Suku Bunga, Iuran Normal Pensiun*

Halaman ini sengaja dikosongkan.

IMPLEMENTATION OF CIR INTEREST RATE MODELS TO DETERMINE NORMAL PENSION CONTRIBUTION IN ACCRUED BENEFIT COST METHOD

Name	:	Zebrilia Dwi Nastiti
NRP	:	1211 100 034
Department	:	Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors	:	1. Endah Rokhmati M.P., Ph.D
		2. Subchan, Ph.D

Abstract

Pension plan is one of the program that guarantee the welfare of employees. Currently, the calculation of pension contribution use a fixed interest rate assumptions all the time. This assumption does not describe the real situation. Therefore, the final project aims to discuss about the interest rate assumption that describes the actual situation. The model of the interest rate used is Cox Ingersoll Ross (CIR) model. In this final project, we discuss the implementation of CIR models and apply it to determine the normal pension contribution. The data which is used for this final project is the data of BI Rate and PT. Taspen (Persero). The implementation results show that the interest rate approximation using CIR models have a similar pattern with interest rate in the market where data doesn't have large fluctuation. The implementation of CIR models at normal pension contribution indicates that the normal contribution dues CIR models tend to be greater in value than the fixed interest rate models.

Key-words: *CIR, Stochastic Interest Rate Model, Normal Contribution of Pension*

Halaman ini sengaja dikosongkan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillaahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah yang telah memberikan limpahan rahmat, petunjuk serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"IMPLEMENTASI MODEL TINGKAT SUKU BUNGA COX INGERSOLL ROSS (CIR) UNTUK MENENTUKAN IURAN NORMAL PENSIUN PROGRAM MANFAAT PASTI"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika ITS.

2. Ibu Endah Rokhmati MP, Ph.D dan Bapak Subchan, Ph.D selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

3. Ibu Dra. Farida Agustini W., M.Si, Ibu Dian Winda S., M.Si, dan Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tugas Akhir ini.

4. Dr. Chairul Imron, MI.Komp., selaku koordinator Tugas Akhir.
5. Drs. Soetrisno, MI.Komp., selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis juga menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Juli 2015

Penulis

Special Thank's To:

Keberhasilan penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ummi, wanita yang paling kuat dan ku sayangi. Terima kasih atas doa dan dukungan, kasih sayang serta nasihat Ummi yang selalu dicurahkan kepada penulis selama ini. *You are my everything Ummi.*

2. Ayah yang telah memberikan pelajaran berharga semasa hidupnya. *I proud to be your child.*

3. Kakak dan adikku yang sangat ku sayangi. Terima kasih banyak atas segala doa, dukungan, motivasi, dan nasihatnya kepada penulis.

4. Sahabat-sahabatku Genggong SSM yang memberi warna tersendiri dalam kehidupan. Eni dan Ade yang selalu menyemangati penulis. Terima kasih karena kalian sudah menjadikanku bagian dari kalian.

5. Teman-teman seperjuangan Tugas Akhir periode 112 yang saling mendukung, membantu dan memotivasi satu sama lain termasuk Yahya yang memberikan bantuan kepada penulis sehingga simulasi Tugas Akhir bisa terselesaikan dengan baik.

6. Teman-teman Matematika 2011, terima kasih atas doa dan dukungan kalian selama ini. Kalian merupakan teman sekaligus keluargaku di kampus.

7. Semua pihak yang tak bisa penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih telah membantu sampai terselesaikannya Tugas Akhir ini.

Halaman ini sengaja dikosongkan.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
LEMBAR PENGESAHAN v
ABSTRAK vii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR xi
DAFTAR ISI xv
DAFTAR GAMBAR xix
DAFTAR TABEL xxi
DAFTAR LAMPIRAN xxiii
DAFTAR SIMBOL xxv
BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Batasan Masalah 4
1.4 Tujuan 5
1.5 Manfaat 5
1.6 Sistematika Penulisan 5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA 7
2.1 Studi Penelitian Sebelumnya 7
2.2 Persamaan Diferensial Stokastik 8
2.3 Integral Ito 9
2.4 Model Tingkat Suku Bunga Cox Ingersoll Ross (CIR) 10

2.5 Metode *Conditional Least Square Estimation* (CLSE) 10
2.6 Metode Milstein 11
2.7 *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) ... 12
2.8 Program Pensiun 13
2.8.1 Definisi Program Pensiun 13
2.8.2 Manfaat Pensiun 15
2.9 Asumsi Aktuaria 15
2.9.1 Asumsi Penurunan Populasi 15
2.9.2 Asumsi Penghasilan yang Akan Datang 16
2.9.3 Asumsi Tingkat Suku Bunga 17
2.10 Fungsi Dasar Aktuaria 17
2.10.1 Fungsi Kelangsungan Hidup 17
2.10.2 Fungsi Anuitas Hidup 17
2.10.3 Fungsi Tingkat Suku Bunga 19
2.10.4 Fungsi Manfaat Pensiun 19

BAB III METODE PENELITIAN 21
3.1 Studi Literatur 21
3.2 Membentuk Tingkat Suku Bunga Model Cox Ingersoll Ross 21
3.3 Menentukan Manfaat Pensiun 22
3.4 Menentukan Iuran Normal Pensiun 22
3.5 Implementasi Model CIR 23
3.6 Penarikan Kesimpulan 23

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN 25
4.1 Tingkat Suku Bunga Model CIR (Cox Ingersoll Ross) 25
4.2 Ekspektasi dan Variansi Bersyarat Model CIR 26
4.3 Estimasi Parameter ($\hat{\alpha}, \hat{\mu}$, dan $\hat{\sigma}^2$) 32
4.4 Rumusan Manfaat Pensiun 37
4.5 Rumusan Iuran Normal Pensiun 38

4.6 Implementasi Model CIR untuk Mengaproksimasi Tingkat Suku Bunga 40
4.6.1 Impementasi model CIR untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga untuk jangka waktu 2 tahun 41
4.6.2 Impementasi model CIR untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga untuk jangka waktu 5 tahun 43
4.6.3 Implementasi model CIR untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga jangka waktu 3 tahun berikutnya, dengan nilai parameter dari data sebelumnya 44
4.7 Implementasi Model CIR untuk Menentukan Iuran Normal Pensiun 46

BAB V PENUTUP 55
5.1 Kesimpulan 55
5.2 Saran 56

DAFTAR PUSTAKA 57

LAMPIRAN 59

Halaman ini sengaja dikosongkan.

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Skala Akurasi Peramalan	13
Tabel 4.1	Hasil Estimasi Parameter Model CIR	41
Tabel 4.2	Hasil Estimasi Parameter Model CIR	47
Tabel 4.3	Hasil Perhitungan PhDP, *Accrual Benefit*, dan Iuran Normal	51
Tabel B1	Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Jangka Waktu 2 Tahun	63
Tabel B2	Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Jangka Waktu 5 Tahun	64
Tabel B3	Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga untuk Jangka Waktu 3 Tahun Berikutnya	66
Tabel G1	Perhitungan Anuitas dengan $r(t)$ CIR	79
Tabel G2	Perhitungan Anuitas dengan $r(t)$ Tetap	81
Tabel H1	Iuran Normal dengan Tingkat Suku Bunga Tetap	83
Tabel H2	Iuran Normal dengan Tingkat Suku Bunga CIR	84
Tabel H3	Iuran Normal dengan Tingkat Suku Bunga CIR dan Tingkat Suku Bunga Tetap	86

Halaman ini sengaja dikosongkan.

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1	Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Jangka Waktu 2 Tahun	42
Gambar 4.2	Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Jangka Waktu 5 Tahun	44
Gambar 4.3	Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga untuk Jangka Waktu 3 Tahun Berikutnya	45
Gambar 4.4	Hasil Simulasi Tingkat Suku Bunga Model CIR	48
Gambar 4.5	Perbandingan Iuran Normal dengan Tingkat Suku Bunga Tetap dan Tingkat Suku Bunga CIR	52

Halaman ini sengaja dikosongkan.

DAFTAR LAMPIRAN

LAMPIRAN A	BI Rate Tahun 2007-2014	61
LAMPIRAN B	Hasil Implementasi Model CIR	63
LAMPIRAN C	Hasil Simulasi Tingkat Suku Bunga CIR	69
LAMPIRAN D	Tabel Penurunan Populasi Winklevoss	71
LAMPIRAN E	Tabel Mortalita Taspen 2012	73
LAMPIRAN F	Daftar Gaji PNS Golongan 3	77
LAMPIRAN G	Perhitungan Anuitas CIR	79
LAMPIRAN H	Perhitungan Iuran Normal	83
LAMPIRAN I	*Listing* Program Model CIR	87
LAMPIRAN J	Biodata Penulis	93

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab pendahuluan ini dijelaskan hal-hal yang melatarbelakangi munculnya permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. Dari permasalahan tersebut disusun suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Pegawai merupakan aset penting bagi perusahaan. Kemajuan dan kemunduran sebuah perusahaan dipengaruhi oleh produktivitas pegawai. Berbagai macam risiko dapat mempengaruhi produktivitas pegawai dalam dunia kerja maupun kehidupan. Kemungkinan risiko yang akan dihadapi oleh pegawai antara lain risiko kehilangan pekerjaan, usia yang kurang produktif (lanjut usia) dan meninggal dunia. Risiko yang timbul dapat memberikan dampak finansial bagi kehidupan pegawai dan keluarganya. Mengatasi risiko-risiko yang akan terjadi maka diciptakan sebuah usaha pencegahan seperti penyelenggaraan program pensiun.

Program pensiun merupakan suatu upaya untuk menyediakan pendapatan bagi pegawai pada saat memasuki masa pensiun sehingga kesejahteraan pegawai di masa pensiun terjamin. Di Indonesia, badan hukum yang mengelola program pendanaan pensiun adalah Dana Pensiun. Dana pensiun dapat dikelola sendiri oleh pemberi kerja atau dikelola perusahaan swasta lain [1]. Kepedulian pemerintah dalam rangka memberikan kesinambungan penghasilan di masa pensiun dan memberikan ketenangan bekerja, diwujudkan melalui penetapan Undang-Undang Nomor 11 Tahun 1992 tentang Dana Pensiun.

Berdasarkan besar manfaat pensiun yang akan diterima pegawai terdapat dua jenis program pensiun, yaitu program pensiun iuran pasti dan program pensiun manfaat pasti. Program pensiun iuran pasti (PPIP) adalah suatu rencana pensiun yang iurannya ditetapkan dalam peraturan Dana Pensiun dan seluruh iuran serta hasil pengembangannya dibukukan pada rekening masing-masing peserta sebagai manfaat pensiun. Besarnya iuran sampai waktu pensiun sudah ditentukan dan besar manfaat pensiun belum diketahui. Program pensiun manfaat pasti (PPMP) adalah program pensiun yang manfaatnya ditetapkan dalam peraturan Dana Pensiun, sedangkan iuran berkala ditetapkan berdasarkan perhitungan aktuaris sehingga dana mencukupi untuk membayar manfaat yang telah dijanjikan kepada peserta [1]. Salah satu yang termasuk program pensiun manfaat pasti adalah program pensiun bagi pegawai negeri sipil (PNS).

Program pensiun PNS memberikan jaminan bagi PNS saat pensiun dengan merencanakan pembayaran berkala yang disebut manfaat pensiun. Pada Tugas Akhir ini dibahas mengenai pelaksanaan program pensiun manfaat pasti pada PNS dengan metode pendanaannya disebut *accrued benefit cost method* (ABCM).

Program pensiun merupakan suatu bentuk pendanaan jangka panjang maka dalam perhitungan pendanaan pensiun perlu diperhatikan beberapa asumsi yang mempertimbangkan kondisi sebenarnya. Salah satunya adalah asumsi tingkat suku bunga yang digunakan oleh aktuaris. Selama ini perhitungan pendanaan pensiun salah satunya adalah iuran normal, masih menggunakan asumsi tingkat suku bunga yang tetap sepanjang waktu. Pada kenyataannya tingkat suku bunga di Indonesia berubah-ubah dan tingkat suku bunga yang berubah-ubah sepanjang waktu merupakan suatu proses stokastik. Dervis Bayazit [2] mengemukakan bahwa tingkat suku bunga selalu bergerak fluktuatif sesuai kondisi perekonomian, namun akan selalu menghampiri nilai tertentu. Kenyataan ini yang mendasari diperlukan model tingkat suku bunga stokastik untuk mengestimasi tingkat suku bunga dengan mempertimbangkan pergerakan tingkat suku bunga yang fluktuatif [3].

Model yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah model Cox Ingersoll Ross (CIR). Model CIR merupakan model stokastik tingkat suku bunga yang menggambarkan perilaku tingkat suku bunga dan mengikuti sifat *mean reversion*. Sifat *mean reversion* adalah suatu keadaan dimana tingkat suku bunga berfluktuasi pada range tertentu dan mempunyai kecenderungan untuk kembali menuju rata-ratanya. Model CIR dipilih karena memiliki pola yang hampir sama dengan tingkat suku bunga di pasar dan menjamin prediksi tingkat suku bunga yang tidak negatif [4].

Berdasarkan pada latar belakang tersebut, dalam Tugas Akhir ini penulis melakukan implementasi model CIR dalam mengaproksimasi tingkat suku bunga Indonesia dan menerapkannya untuk perhitungan iuran normal menggunakan pendekatan tingkat suku bunga model CIR. Tujuannya adalah agar perhitungan iuran normal pensiun lebih sesuai dengan kondisi sebenarnya yaitu tingkat suku bunga yang berubah-ubah.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut rumusan masalah pada Tugas Akhir ini adalah

1. Bagaimana model Cox Ingersoll Ross (CIR) dalam mengaproksimasi tingkat suku bunga?
2. Bagaimana menentukan iuran normal pensiun pada PNS dengan menggunakan tingkat suku bunga stokastik model Cox Ingersoll Ross (CIR)?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam Tugas Akhir ini antara lain:

1. Jenis pendanaan pensiun adalah pensiun normal yaitu pensiun pada saat peserta berusia 58 tahun.
2. Metode pendanaan pensiun yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah *accrued benefit cost method.*
3. Penelitian merupakan studi kasus individu (*single life*) dan *single decrement.*
4. Data yang digunakan dalam implementasi adalah data sekunder dari PT. Taspen (Persero) untuk pegawai negeri sipil (PNS) dan data BI *Rate.*
5. Gaji yang digunakan dalam perhitungan merupakan gaji pokok.
6. Kenaikan gaji hanya dipengaruhi oleh masa kerja dan golongan pangkat dari peserta masuk sampai pensiun adalah sama.
7. Peluang penurunan populasi menggunakan *service table* (Winklevoss) dan peluang hidup menggunakan Tabel Mortalita Taspen 2012.

1.4 Tujuan

Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah

1. Mengetahui performansi model Cox Ingersoll Ross (CIR) dalam mengaproksimasi tingkat suku bunga.

2. Mendapatkan iuran normal pensiun dengan menggunakan pendekatan tingkat suku bunga stokastik model Cox Ingersoll Ross (CIR).

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pengetahuan mengenai penerapan model tingkat suku bunga stokastik yaitu Cox Ingersoll Ross (CIR) untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga di pasar dan menentukan iuran pensiun pada program manfaat pasti.

2. Sebagai bahan pertimbangan bagi lembaga pengelola dana pensiun dalam menentukan iuran bagi peserta pensiun dengan memperhatikan tingkat suku bunga yang bergerak secara stokastik.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN
   Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah dari Tugas Akhir ini, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan yang memberikan arahan terhadap penulisan Tugas Akhir ini.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Bab ini membahas tentang teori dasar yang menunjang

pembahasan tentang implementasi model Cox Ingersoll Ross (CIR) untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga dan menentukan iuran pensiun seperti persamaan diferensial stokastik, model CIR, metode *conditional least square estimation*, metode Milstein, program pensiun, asumsi aktuaria, dan fungsi dasar aktuaria.

3. BAB III METODE PENELITIAN
   Dalam bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, membentuk tingkat suku bunga yang mengikuti model CIR dengan mengestimasi parameter. Selanjutnya menentukan rumusan manfaat pensiun dan iuran normal pensiun serta penyelesaiannya mengikuti tingkat suku bunga CIR. Tahap terakhir adalah melakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Pada Bab IV dibahas secara detail mengenai estimasi parameter model CIR, simulasi tingkat suku bunga model CIR, rumusan manfaat pensiun dan iuran normal pensiun serta implementasi model CIR dalam mengaproksimasi tingkat suku bunga dan menentukan iuran normal pensiun.

5. BAB V PENUTUP
   Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari analisis dan pembahasan serta terdapat saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas mengenai konsep atau teori yang digunakan dalam Tugas Akhir. Konsep dan teori yang digunakan adalah studi penelitian sebelumnya, persamaan diferensial stokastik, integral Ito, model tingkat suku bunga CIR, metode *conditional least square estimation* (CLSE), metode Milstein, dan fungsi dasar aktuaria.

2.1 Studi Penelitian Sebelumnya

Berikut ini beberapa penelitian yang berkaitan dengan Tugas Akhir ini:

1. Pada tahun 2013, Oktiana [5] melakukan penelitian dengan judul "Perhitungan Aktuaria untuk Manfaat Pensiun Normal Menggunakan Metode *Projected Unit Credit* dan *Entry Age Normal*". Pada penelitian tersebut, penulis mengusulkan untuk menggunakan tingkat suku bunga kewajiban pensiun sesuai kondisi yang ada yaitu mengalami fluktuasi pada satuan waktu.

2. Soffan [6] dengan penelitiannya yang berjudul "Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Berjangka Menggunakan Model Stokastik Tingkat Suku Bunga" dan Noviyanti [3] dengan penelitiannya yang berjudul *"Life Insurance with Stochastic Interest Rate"*, keduanya melakukan penelitian dengan tema yang sama. Dalam penelitian mereka, telah dipertimbangkan perubahan tingkat suku bunga sesuai dengan kondisi sebenarnya. Model tingkat suku bunga yang digunakan

dalam penelitian adalah model Vasicek. Namun model Vasicek masih memungkinkan tingkat suku bunga bernilai negatif.

3. Barokah [4] melakukan penelitian mengenai aproksimasi tingkat bunga harian dan harga *zero coupon bond* dengan mengimplementasikan model Cox Ingersoll Ross (CIR). Hasil penelitian menunjukkan bahwa aproksimasi tingkat bunga harian berdasarkan model CIR cukup baik.

4. Ghuan [7] dalam penelitiannya yang berjudul *"Optimal Management of DC Pension Plan in a Stochastic Interest and Stochastic Volality Framework"* melakukan penelitian mengenai program pensiun iuran pasti dengan menggunakan model CIR. Sedangkan program pensiun yang digunakan oleh PNS adalah program pensiun manfaat pasti.

2.2 Persamaan Diferensial Stokastik

Pada subbab ini membahas mengenai persamaan diferensial stokastik. Pembahasan ini diperlukan karena dalam model CIR, pergerakan tingkat suku bunga dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial stokastik. Persamaan diferensial stokastik secara umum memiliki bentuk sebagai berikut:

Definisi 2.2.1
Misalkan $\{r(t), t \geq 0\}$ adalah suatu proses stokastik dan $\{W(t), t \geq 0\}$ adalah proses Wiener, maka

$$dr(t) = \mu(r(t), t)dt + \sigma(r(t), t)dW(t), \tag{2.1}$$

adalah persamaan diferensial stokastik, dimana $\mu(r(t), t)$ disebut suku *drift* dan $\sigma(r(t), t)$ disebut suku difusi [8].

Persamaan diferensial stokastik (2.1) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$r(t) = r(0) + \int_0^t \mu(r(s), s)ds + \int_0^t \sigma(r(s), s)dW(s), \qquad (2.2)$$

dengan nilai awal $r(0)$ dan $W(t)$ adalah proses Wiener.

2.3 Integral Ito

Pembahasan mengenai integral Ito diperlukan untuk mengetahui sifat dari integral Ito yang akan digunakan pada pembahasan ekspektasi dan variansi tingkat suku bunga model CIR.

Definisi 2.3.1
Integral Ito $\int_0^T r(t)dW(t)$ dari proses sederhana didefinisikan sebagai [8]

$$\int_0^T r(t)dW(t) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i \big[W(t_{i+1}) - W(t_i)\big].$$

Adapun sifat-sifat dari integral Ito untuk proses sederhana adalah:

1. Linier. Jika $r(t)$ dan $Y(t)$ merupakan proses sederhana dan a, b adalah konstanta maka

$$\int_0^T (ar(t) + bY(t))dW(t) = a\int_0^T r(t)dW(t) + b\int_0^T Y(t)dW(t). \qquad (2.3)$$

2. Ekspektasi dari integral stokastik Ito adalah nol, yaitu

$$E\left[\int_0^T r(t)dW(t)\right] = 0. \qquad (2.4)$$

3. Integral stokastik Ito memenuhi sifat isometris, yaitu

$$E\left[\left(\int_0^T r(t)dW(t)\right)^2\right] = \int_0^T E\left[r^2(t)\right]dt. \tag{2.5}$$

untuk $t \in [0, T]$

2.4 Model Tingkat Suku Bunga Cox Ingersoll Ross (CIR)

Model Cox Ingersoll Ross (CIR) merupakan salah satu jenis model yang menggambarkan perilaku tingkat suku bunga yang mempunyai sifat *mean reversion* dan menjamin prediksi tingkat suku bunga tidak negatif. Model ini diperkenalkan pada tahun 1985 oleh John C.Cox, Jonathan E.Ingersoll, Jr., dan Stephen A.Ross. Bentuk dari Model CIR adalah [9]

$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \tag{2.6}$$

dengan

$r(t)$	:	tingkat suku bunga pada saat ke-t
μ	:	rata-rata tingkat suku bunga jangka panjang
α	:	kecepatan penyesuaian $r(t)$ terhadap μ
σ	:	volatilitas yang menggambarkan pergerakan dari tingkat suku bunga
$W(t)$	:	proses Wiener.

2.5 Metode *Conditional Least Square Estimation* (CLSE)

Metode *conditional least square estimation* (CLSE) adalah suatu metode untuk memperoleh estimator parameter untuk observasi yang saling bergantung (*dependent*) dengan berdasar pada jumlah kuadrat error dari *conditional expectation* [10]. Prinsip metode *conditional least square estimation* sama seperti metode *least square* yaitu tidak membutuhkan asumsi distribusi error. Misalkan terdapat fungsi ekspektasi bersyarat yaitu

$$m(r;\theta) = E_\theta(r_t|r_1,...,r_{t-1}) = E_\theta(r_t|F_{t-1}).$$

F_{t-1} adalah σ-*field* yang dihasilkan oleh $r_1,...,r_t$. Pada Tugas Akhir ini, $\{r_t\}$ adalah proses Markov sehingga F_{t-1} dapat diganti dengan $\sigma(r_{t-1})$.

θ adalah notasi untuk parameter yang dicari maka estimatornya dapat dicari dengan meminimumkan fungsi jumlah kuadrat bersyarat [11]

$$f_\theta(r_t) = \sum_{t=1}^{n}(r_t - m(r;\theta))^2. \tag{2.7}$$

Solusi θ yang meminimumkan fungsi jumlah kuadrat bersyarat $f_\theta(r_t)$ diperoleh dengan cara menurunkan fungsi $f_\theta(r_t)$ terhadap θ.

2.6 Metode Milstein

Penentuan tingkat suku bunga model CIR dilakukan dengan simulasi menggunakan metode Milstein. Metode Milstein merupakan suatu metode numerik yang dapat digunakan untuk membentuk simulasi solusi numerik dari persamaan diferensial stokastik dengan *order strong convergence* 1.

Jika terdapat persamaan diferensial stokastik yaitu

$$dr(t) = f(r(t))dt + g(r(t))dW(t), \quad r(0) = r_0, \quad 0 \le t \le T.$$

Mempunyai skema Milstein sebagai berikut [12]

$$\begin{aligned} r_t &= r_{t-1} + \triangle t f(r_{t-1}) + g(r_{t-1})(W(\tau_t) - W(\tau_{t-1})) \\ &\quad + \frac{1}{2}g(r_{t-1})g'(r_{t-1})\big((W(\tau_t) - W(\tau_{t-1}))^2 - \triangle t\big), \end{aligned} \tag{2.8}$$

dengan $t = 1, 2, ..., L$. $\triangle t = \dfrac{T}{L}$ dengan L menyatakan banyak diskritisasi. Untuk $\tau_t = t \triangle t$ dan $W(\tau_t) - W(\tau_{t-1}) = dW_t$ dengan $dW_t = \sqrt{\triangle t}\ N(0,1)$.

Simulasi ini didasarkan pada pembentukan proses Wiener yang didiskritisasi, yaitu dengan membangkitkan sederetan variabel acak berdistribusi normal yang menyatakan proses Wiener ($W(t)$) di waktu t yang diskrit. Prinsip penentuan tingkat suku bunga dengan metode Milstein adalah dengan melakukan simulasi berulang kali sehingga membentuk beberapa lintasan tingkat suku bunga.

2.7 *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE)

Mean Absolute Percentage Error (MAPE) merupakan ukuran standar yang sering digunakan dalam ukuran kesesuaian sebuah metode peramalan. MAPE digunakan untuk melihat seberapa jauh (dalam %) hasil peramalan melenceng dari data sebenarnya. Jika nilai MAPE yang dihasilkan dari sebuah metode semakin kecil maka metode tersebut semakin baik. Rumus MAPE didefinisikan sebagai berikut [13]:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \frac{\mid r_t - \hat{r}_t \mid}{r_t}, \tag{2.9}$$

dengan

r_t : nilai aktual pada periode waktu t

$\hat{r}_t$: nilai ramalan untuk periode waktu t.

n : banyak periode.

Semakin kecil MAPE maka akurasi peramalan yang dihasilkan semakin baik. Berikut ini skala akurasi peramalan menurut Lewis [13].

Tabel 2.1: Skala Akurasi Peramalan

MAPE	Tingkat Akurasi Peramalan
$\leq$ 10%	*Highly accurate*
11% - 20%	*Good forecast*
21% - 50%	*Reasonable forecast*
51% - lebih	*Inaccurate forecast*

2.8 Program Pensiun

2.8.1 Definisi Program Pensiun

Berdasarkan Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 11 Tahun 1992 tentang Dana Pensiun didefinisikan bahwa program pensiun adalah setiap program yang mengupayakan manfaat pensiun bagi peserta. Manfaat pensiun itu berupa pembayaran berkala yang diberikan setelah peserta mencapai usia pensiun. Badan hukum yang mengelola dan menjalankan program yang menjanjikan manfaat pensiun adalah Dana Pensiun. Ada dua jenis program pensiun, yaitu:

1. Program Pensiun Manfaat Pasti
   Yaitu program pensiun dengan manfaat yang akan didapatkan telah ditentukan, dan iuran ditentukan berdasarkan penghitungan sehingga akan mencukupi untuk membayar manfaat yang dijanjikan. Sehingga penyelenggara pensiun menetapkan besar manfaat yang akan diterima peserta pada masa pensiun kemudian menghitung besarnya iuran normal (NC) yang harus dibayarkan. Metode perhitungan ini disebut *accrued benefit cost method.* Rumusan NC untuk pensiun normal dengan metode *accrued benefit cost method* adalah [14]

$$(NC)_x = b_x \ddot{a}_r v^{r-x} \; {}_{r-x}p_x, \tag{2.10}$$

   dengan

b_x	:	*accrual benefit* atau besar manfaat tahunan pensiun selama usia x tahun sampai $x+1$ tahun
$\ddot{a}_r$	:	anuitas hidup pada saat pensiun
v^{r-x}	:	faktor diskonto untuk *present value*
${}_{r-x}p_x$	:	peluang seseorang berusia x tahun akan tetap bekerja sampai usia pensiun r tahun.

2. Program Pensiun Iuran Pasti
   Yaitu program pensiun dengan iuran untuk pegawai telah ditetapkan terlebih dahulu, dan manfaat yang diperoleh adalah semua jumlah iuran ditambah dengan hasil pengembangan yang dibukukan pada rekening masing-masing peserta. Dengan kata lain, penyelenggara dana pensiun terlebih dahulu menetapkan iuran (NC) kemudian dihitung berapa besarnya manfaat pensiun. Metode perhitungan ini disebut *projected benefit cost method* (PBCM). Rumusan manfaat pensiun untuk metode PBCM adalah [14]

$$B_r = \frac{\sum_{t=y}^{r-1}(NC)_t(1+i)^{-(t-y)}\ {}_{t-y}p_y^{(T)}}{\ddot{a}_r(1+i)^{-(r-y)}\ {}_{r-y}p_y}, \qquad (2.11)$$

   dengan

$(NC)_t$	:	iuran normal sejak masuk kerja pada y tahun sampai dengan satu tahun sebelum pensiun $(r-1)$
i	:	tingkat suku bunga
$\ddot{a}_r$	:	anuitas hidup pada saat pensiun
${}_{t-y}p_y$	:	peluang seorang pegawai berusia y tahun masih bekerja sampai dengan $t-y$ tahun.

Untuk Tugas Akhir ini, program pensiun yang digunakan adalah program pensiun manfaat pasti dengan metode pendanaan *accrued benefit cost method.*

2.8.2 Manfaat Pensiun

Manfaat pensiun adalah pembayaran berkala yang dibayarkan kepada peserta dengan cara yang ditetapkan dalam peraturan Dana Pensiun. Macam-macam manfaat pensiun antara lain [1]:

1. Manfaat Pensiun Normal
   Manfaat pensiun bagi peserta, yang mulai dibayarkan pada saat peserta pensiun setelah mencapai usia pensiun normal.

2. Manfaat Pensiun Dipercepat
   Manfaat pensiun bagi peserta yang dibayarkan bila peserta pensiun pada usia tertentu sebelum usia normal.

3. Manfaat Pensiun Cacat
   Manfaat pensiun bagi peserta yang dibayarkan bila peserta menjadi cacat dan kemudian pensiun.

4. Manfaat Pensiun Ditunda
   Merupakan hak atas manfaat pensiun bagi peserta yang berhenti bekerja sebelum mencapai usia pensiun normal, yang ditunda pembayarannya sampai pada saat peserta pensiun sesuai dengan Peraturan Dana Pensiun.

2.9 Asumsi Aktuaria

Asumsi Aktuaria merupakan harapan berdasarkan pengalaman masa lalu yang diperkirakan sesuai dengan keadaan sekarang atau masa depan. Asumsi yang dibutuhkan dalam pendanaan pensiun meliputi [14]:

2.9.1 Asumsi Penurunan Populasi

Asumsi penurunan populasi adalah semua kemungkinan yang dapat terjadi pada peserta pensiun. Penurunan populasi dapat disebabkan oleh berbagai hal diantaranya adalah tingkat kematian, tingkat cacat, pensiun normal, pensiun dipercepat, dan pensiun dini. Penurunan populasi (tingkat *decrement*) biasa disajikan dalam bentuk tabel yang disebut tabel *decrement*. Tabel *decrement* adalah sebuah model matematika yang menganggap bahwa sekelompok orang yang menjadi sasaran beberapa penyebab *decrement* yang *independent* yang berlangsung secara terus-menerus. Salah satu contoh tabel *decrement* adalah Tabel Mortalita.

2.9.2 Asumsi Penghasilan yang Akan Datang

Asumsi penghasilan yang akan datang (*salary assumption*) pada perhitungan dana pensiun mempunyai peran untuk menentukan besarnya iuran dan manfaat pensiun. Untuk mengetahui besar penghasilan yang akan datang, dilakukan estimasi terhadap besar gaji peserta pensiun di masa depan. Estimasi tersebut mempertimbangkan tiga komponen, yaitu:

1. Peningkatan gaji karena peningkatan jasa.
   Merupakan peningkatan gaji yang akan diterima seorang pegawai karena kemajuan dalam karirnya dan kemampuan yang semakin meningkat seiring bertambahnya usia dan masa kerja.

2. Peningkatan gaji karena produktivitas keuntungan perusahaan.
   Peningkatan gaji yang akan diterima oleh pegawai karena perusahaan tempat bekerja memperoleh laba akibat peningkatan produktivitas perusahaan. Komponen ini sulit untuk diperkirakan karena ketidakpastian laba yang diperoleh sehingga komponen ini sering diabaikan.

3. Peningkatan gaji karena adanya inflasi
   Inflasi merupakan faktor yang paling signifikan terhadap kenaikan gaji. Setiap program pensiun dan lembaga

pengelola dapat mengasumsikan tingkat inflasi yang berbeda-beda.

2.9.3 Asumsi Tingkat Suku Bunga

Asumsi tingkat suku bunga memberi pengaruh yang kuat dalam pembiayaan pensiun, karena asumsi ini digunakan untuk mencari *present value* dari nilai uang di masa depan. Pada realitanya, tingkat suku bunga merupakan suatu proses stokastik. Dimana tingkat suku bunga di masa depan dapat berubah sewaktu-waktu.

2.10 Fungsi Dasar Aktuaria

Fungsi dasar aktuaria merupakan komponen dasar untuk memformulasikan iuran dan manfaat pensiun. Fungsi-fungsi ini terdiri dari fungsi kelangsungan hidup, fungsi anuitas hidup, fungsi tingkat suku bunga, dan fungsi manfaat.

2.10.1 Fungsi Kelangsungan Hidup

Fungsi kelangsungan hidup adalah fungsi yang menggambarkan peluang hidup seorang pegawai. Jika seorang pegawai berumur x tahun maka peluang hidup seorang pegawai bertahan hingga t tahun dinyatakan dengan [15]

$$
{}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}, \tag{2.12}
$$

dengan

l_{x+t} : jumlah pegawai yang berusia x tahun hingga t tahun berikutnya

l_x : jumlah pegawai yang berusia x tahun.

2.10.2 Fungsi Anuitas Hidup

Anuitas hidup adalah serangkaian pembayaran yang dilakukan kepada seseorang selama orang tersebut hidup. Anuitas hidup terbagi menjadi dua bagian yaitu anuitas hidup kontinu dan anuitas hidup diskrit. Anuitas hidup diskrit adalah anuitas hidup yang dibayarkan kepada (ataupun oleh) seorang peserta program pensiun secara berkala setiap periodenya.

Berdasarkan sistem pembayaran yang dilakukan, anuitas hidup diskrit dibagi menjadi dua yaitu *annuity immediate* dan *annuity due*. *Annuity due* adalah serangkaian pembayaran yang dilakukan di awal periode (dimuka) dan *annuity immediate* adalah pembayaran anuitas yang dilakukan pada akhir periode. Pada pembahasan selanjutnya, hanya akan dibahas anuitas hidup diskrit dimuka.

Berdasarkan periode waktunya, anuitas hidup diskrit dimuka dibagi menjadi dua, yaitu [15]:

1. Anuitas seumur hidup diskrit dimuka.
   Anuitas seumur hidup dimuka merupakan pembayaran yang dibayarkan setiap awal periode kepada (ataupun oleh) seorang peserta program pensiun sampai ia meninggal dunia. *Actuarial present value* dari anuitas seumur hidup diskrit dimuka yang dimulai dari usia x tahun dinotasikan dengan $\ddot{a}_x$ adalah

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \ {}_tp_x. \tag{2.13}$$

2. Anuitas hidup diskrit dimuka berjangka n tahun.
   Anuitas hidup diskrit dimuka berjangka n tahun merupakan sederetan pembayaran yang dibayarkan setiap awal periode kepada (ataupun oleh) seorang peserta program pensiun selama n tahun ataupun hingga ia meninggal dunia, bergantung pada kondisi mana yang lebih dahulu tercapai. *Actuarial present value* dari anuitas hidup diskrit dimuka berjangka n tahun yang dimulai dari usia x tahun dirumuskan

sebagai berikut

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \ {}_tp_x. \tag{2.14}$$

2.10.3 Fungsi Tingkat Suku Bunga

Fungsi tingkat suku bunga digunakan untuk mendiskonto pembayaran yang akan datang pada saat ini. Jika r_t adalah tingkat suku bunga untuk tahun ke-t, maka *present value* dari 1 yang harus dibayar setelah n tahun adalah [14]

$$v^n = \prod_{t=1}^{n} (\frac{1}{1+r_t}), \tag{2.15}$$

dengan v^n menyatakan *present value* mulai tahun ke-1 sampai tahun ke-n. Untuk Tugas Akhir ini tingkat suku bunga yang digunakan bergerak fluktuatif dan mengikuti model tingkat suku bunga stokastik CIR.

2.10.4 Fungsi Manfaat Pensiun

Fungsi Manfaat (*benefit function*) berfungsi untuk menentukan jumlah manfaat yang harus dibayarkan perusahaan kepada peserta pada saat pensiun. Terdapat tiga jenis rumus manfaat yang paling umum digunakan dalam program pensiun manfaat pasti, yaitu berdasarkan gaji terakhir, rata-rata gaji selama bekerja, dan rata-rata gaji selama n tahun terakhir [14].

1. Gaji terakhir
   Besarnya manfaat pensiun (B_r) yang dibayarkan setiap tahunnya merupakan perkalian persentase dari gaji yang diberikan (k) dengan masa kerja ($r - y$) tahun dikalikan gaji terakhir sebelum pensiun s_{r-1}. Besar manfaat pensiun pada usia pensiun r tahun adalah

$$B_r = k(r - y)s_{r-1}. \tag{2.16}$$

2. Rata-rata gaji selama n tahun terakhir
   Jika n adalah banyaknya tahun terakhir dimana gaji akan dirata-ratakan dan k adalah persentase dari gaji yang diberikan untuk manfaat, maka besarnya manfaat pada usia pensiun r tahun adalah

$$B_r = k(r-y)\frac{1}{n}\sum_{t=r-n}^{r-1} s_t. \tag{2.17}$$

3. Rata-rata gaji selama bekerja
   Penentuan besar manfaat pensiun dihitung berdasarkan rata-rata gaji selama bekerja, yaitu

$$B_r = kS_r. \tag{2.18}$$

   dengan k adalah persentase dari gaji yang diberikan untuk manfaat dan S_r jumlah gaji selama bekerja.

Pada Tugas Akhir ini, fungsi manfaat pensiun yang digunakan untuk PNS adalah fungsi manfaat pensiun berdasarkan gaji terakhir.

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Metode penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri atas enam tahap, antara lain studi literatur, menentukan tingkat suku bunga model Cox Ingersoll Ross (CIR), menetukan rumusan manfaat pensiun, menentukan rumusan iuran normal pensiun, implementasi model CIR, dan penarikan kesimpulan.

3.1 Studi Literatur

Dalam tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dan pemahaman teori serta konsep dengan mencari referensi tentang konsep pendanaan pensiun dan model tingkat suku bunga Cox Ingersoll Ross (CIR). Pembelajaran lebih mendalam mengenai hal tersebut diperoleh baik melalui buku-buku literatur, jurnal, paper, maupun artikel dari internet.

3.2 Membentuk Tingkat Suku Bunga Model Cox Ingersoll Ross

Pada tahap ini, dilakukan pembentukan tingkat suku bunga yang mengikuti model CIR. Langkah-langkah yang dilakukan dalam tahap ini antara lain:

1. Estimasi parameter model CIR
   Pada model tingkat suku bunga CIR terdapat tiga parameter yang tidak diketahui dan harus diestimasi yaitu α, μ, dan σ. Pada Tugas Akhir ini, metode *conditional least square estimation* (CLSE) digunakan untuk mengestimasi parameter-parameter tersebut.

Pada estimasi parameter digunakan data tingkat suku bunga BI *Rate*.

2. Menentukan tingkat suku bunga model CIR
   Setelah memperoleh estimasi parameter untuk model CIR dengan CLSE kemudian menentukan tingkat suku bunga yang mengikuti model CIR. Penentuan tingkat suku bunga model CIR dilakukan dengan pendekatan menggunakan simulasi metode Milstein yang disimulasikan.

3.3 Menentukan Manfaat Pensiun

Pada tahap ini ditentukan rumusan manfaat pensiun yang akan diterima para pensiun. Perumusan manfaat pensiun dilakukan sesuai dengan peraturan yang berlaku di setiap perusahaan atau instansi. Pada Tugas Akhir ini, penulis menggunakan rumusan manfaat pensiun untuk pegawai negeri sipil. Lembaga dana pensiun yang mengelola pendanaan pensiun pegawai negeri sipil adalah PT. Taspen (Persero). Rumusan manfaat pensiun yang digunakan pada PT. Taspen (Persero) adalah berdasarkan pada Surat Menteri Keuangan Nomor: S-41/ MK.06/2008 tanggal 21 Januari 2009 perihal Formula Biaya Penyelenggaraan Dana Pensiun Pegawai Negeri Sipil (PNS).

3.4 Menentukan Iuran Normal Pensiun

Pada tahap ini ditentukan rumusan iuran normal pensiun. Metode perhitungan yang digunakan dalam menentukan iuran normal pada Tugas Akhir ini adalah *accrued benefit cost method*. Rumusan iuran normal pada Tugas Akhir ini hanya untuk pensiun normal. Penyebab pensiun yaitu karena pegawai atau peserta pensiun telah memasuki usia pensiun yang ditetapkan oleh penyelenggara pendanaan pensiun.

3.5 Implementasi Model CIR

Tahap ini membahas mengenai implementasi model CIR untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga dan implementasi model CIR untuk menentukan iuran normal pada pensiun normal untuk tingkat suku bunga mengikuti model CIR. Estimasi parameter menggunakan metode *conditional least square estimation*, data yang digunakan adalah data BI *Rate*, dan menggunakan Tabel Mortalita Taspen 2012. Dalam tahap ini juga dilakukan analisis hasil terhadap hasil implementasi yang telah dilakukan.

3.6 Penarikan Kesimpulan

Tahap akhir dalam penelitian ini adalah penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan mengenai implementasi model tingkat suku bunga Cox Ingersoll Ross (CIR) untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga dan untuk menentukan iuran normal pensiun.

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai implementasi model CIR dalam aproksimasi tingkat suku bunga dan perhitungan iuran normal pensiun. Pembahasan dimulai dengan penjelasan model tingkat suku bunga CIR dan estimasi parameter dari model CIR. Kemudian dilanjutkan dengan rumusan manfaat pensiun dan iuran normal pensiun. Setelah itu, dibahas mengenai implementasi model CIR dalam mengaproksimasi tingkat suku bunga dan menentukan iuran normal pensiun yang mengikuti model tingkat suku bunga CIR. Pada akhir pembahasan dilakukan analisis hasil terhadap hasil implementasi yang telah dilakukan.

4.1 Tingkat Suku Bunga Model CIR (Cox Ingersoll Ross)

Model CIR pada perhitungan iuran normal pensiun digunakan dengan tujuan untuk menentukan faktor diskonto untuk *present value* dari manfaat pensiun yang akan diperoleh di masa pensiun nanti dengan asumsi tingkat suku bunga berubah-ubah sepanjang waktu. Dengan adanya volatilitas pada tingkat suku bunga, maka perubahan tingkat suku bunga pada saat t, yang dinotasikan dengan $r(t)$ terhadap perubahan waktu dinyatakan sebagai berikut:

$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t). \tag{4.1}$$

Model CIR dapat dinyatakan dalam bentuk integral sebagai berikut:

$$r(t) = r(0) + \alpha \int_0^t (\mu - r(u))du + \sigma \int_0^t \sqrt{r(u)}dW(u). \tag{4.2}$$

Berdasarkan bentuk integral tersebut dapat diperoleh rata-rata dan varians dari $r(t)$ yang telah dibahas oleh Barokah [4], sebagai berikut:

$$E[r(t)] = \mu + e^{-\alpha t}(r(0) - \mu). \tag{4.3}$$

$$Var[r(t)] = \frac{\mu\sigma^2}{2\alpha} + (r(0) - \mu)\frac{\sigma^2}{\alpha}e^{-\alpha t} + \frac{\sigma^2}{\alpha}(\frac{\mu}{2} - r(0))e^{-2\alpha t} \tag{4.4}$$

Saat $r(0) = \mu$, $E[r(t)] = \mu$ untuk setiap t. Jika $r(0) \neq \mu$, maka $\lim_{t\to\infty} E[r(t)] = \mu$. Ini membuktikan sifat *mean reversion*, yaitu jika t menunjukkan waktu jangka panjang maka rata-rata dari tingkat suku bunga akan menuju *mean reversion level* (rata-rata jangka panjang dari tingkat suku bunga).

4.2 Ekspektasi dan Variansi Bersyarat Model CIR

Pada model tingkat suku bunga CIR terdapat tiga parameter yang tidak diketahui dan harus diestimasi nilainya. Parameter tersebut adalah α, μ, dan σ. Parameter pada model CIR merupakan konstanta yang bernilai positif. Estimasi parameter Model CIR dalam penelitian ini menggunakan metode *conditional least square estimation* (CLSE). Untuk memperoleh parameter-parameter dari model CIR dengan menggunakan metode CLSE, perlu diperoleh terlebih dahulu ekspektasi dan variansi bersyarat dari model CIR.

Model CIR merupakan contoh proses Ornstein-Uhlenbeck, atau biasa dikenal dengan proses *mean reverting*, yaitu proses stokastik r yang dapat dinyatakan dalam persamaan differensial stokastik. Untuk mencari solusi dari model CIR, perhatikan proses $Y(t) = f(t, r(t)) = e^{\alpha t}r(t)$ [4]. $Y(t)$ diturunkan terhadap dt dan dengan menggunakan aturan perkalian fungsi diperoleh

$$\begin{aligned} dY(t) &= d\big(e^{\alpha t}r(t)\big)dt \\ &= e^{\alpha t}dr(t) + \alpha e^{\alpha t}r(t)dt. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Subtitusikan $dr(t)$ pada persamaan (4.1) ke persamaan (4.5) maka diperoleh

$$\begin{aligned} dY(t) &= e^{\alpha t}\big(\alpha(\mu - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)\big) + \alpha e^{\alpha t} r(t)dt \\ &= e^{\alpha t}(\alpha\mu dt - \alpha r(t)dt) + e^{\alpha t}\sigma\sqrt{r(t)}dW(t)) + \alpha e^{\alpha t} r(t)dt \\ &= \alpha\mu e^{\alpha t}dt + e^{\alpha t}\sigma\sqrt{r(t)}dW(t). \qquad (4.6) \end{aligned}$$

Persamaan (4.6) diintegralkan dari t sampai T, sehingga diperoleh bentuk integral sebagai berikut

$$\begin{aligned} \int_t^T dY(u) &= \int_t^T \left(\alpha\mu e^{\alpha u}du + e^{\alpha u}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u)\right) \\ \int_t^T dY(u) &= \int_t^T \alpha\mu e^{\alpha u}du + \int_t^T e^{\alpha u}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u)) \\ Y(T) - Y(t) &= \int_t^T \alpha\mu e^{\alpha t}du + \int_t^T e^{\alpha t}\sigma r(u)dW(u) \\ Y(T) &= Y(t) + \int_t^T \alpha\mu e^{\alpha u}du + \\ &\quad \int_t^T e^{\alpha u}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u). \qquad (4.7) \end{aligned}$$

Kedua ruas pada persamaan (4.7) dikalikan dengan $e^{-\alpha T}$. Karena $Y(t) = r(t)e^{\alpha t}$ maka $r(t) = Y(t)e^{-\alpha t}$ sehingga persamaan (4.7) menjadi

$$\begin{aligned} Y(T)e^{-\alpha T} &= Y(t)e^{-\alpha T} + e^{-\alpha T}\int_t^T \alpha\mu e^{\alpha u}du \\ &\quad + e^{-\alpha T}\int_t^T e^{\alpha u}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u) \\ r(T) &= r(t)e^{\alpha t}e^{-\alpha T} + e^{-\alpha T}\int_t^T \alpha\mu e^{\alpha u}du \\ &\quad + e^{-\alpha T}\int_t^T e^{\alpha u}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r(T) &= r(t)e^{-(T-t)\alpha} + \alpha e^{\alpha T}\int_t^T \mu e^{\alpha u} du \\
&\quad + \int_t^T \sigma e^{-(T-u)\alpha}\sqrt{r(u)}dW(u) \\
&= r(t)e^{-(T-t)\alpha} + \frac{\alpha\mu}{\alpha}\big(e^{-(T-u)\alpha}\big|_t^T\big) \\
&\quad + \int_t^T \sigma e^{-(T-u)\alpha}\sqrt{r(u)}dW(u) \\
&= r(t)e^{-(T-t)\alpha} + \mu - \mu e^{-(T-t)\alpha} \\
&\quad + \int_t^T e^{-(T-u)\alpha}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u). \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (4.8) dapat dicari ekspektasi bersyarat dari $r(T)$ bersyarat $r(t)$, yaitu

$$
\begin{aligned}
E\big(r(T)|r(t)\big) &= E\Bigg(r(t)e^{-(T-t)\alpha} + \mu - \mu e^{-(T-t)\alpha} \\
&\quad + \int_t^T e^{-(T-u)\alpha}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u)\big|r(t)\Bigg) \\
E\big(r(T)|r(t)\big) &= E\Bigg(r(t)e^{-(T-t)\alpha} + \mu - \mu e^{-(T-t)\alpha}\big|r(t)\Bigg) \\
&\quad + E\Bigg(\int_t^T e^{-(T-t)\alpha}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u)\big|r(t)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Berdasarkan sifat integral stokastik Ito pada persamaan (2.4), maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
E(r(T)|r(t)) &= E\big(r(t)e^{-(T-t)\alpha} + \mu - \mu e^{-(T-t)\alpha}\big|r(t)\big) + 0 \\
E(r(T)|r(t)) &= E[r(t)e^{-(T-t)\alpha}|r(t)] + E[\mu|r(t)] \\
&\quad - E[\mu e^{-(T-t)\alpha}|r(t)] \\
&= r(t)e^{-(T-t)\alpha} + \mu - \mu e^{-(T-t)\alpha} \\
&= r(t)e^{-\alpha\triangle t} + \mu(1 - e^{-\alpha\triangle t}). \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Untuk $r(T) = r_t$ dan $r(t) = r_{t-1}$ maka ekspektasi bersyarat model CIR dari persamaan (4.9) adalah

$$\begin{aligned} E(r_t|r_{t-1}) &= \mu(1 - e^{-\alpha\triangle t}) + r_{t-1}e^{-\alpha\triangle t} \\ &= \gamma_0 + \gamma_1 r_{t-1}. \end{aligned}$$

θ adalah himpunan parameter yang akan diestimasi, dengan $\gamma_0 = \mu(1-e^{-\alpha\triangle t})$ dan $\gamma_1 = e^{-\alpha\triangle t}$. Sehingga *conditional mean function* model CIR adalah

$$m(r;\theta) = E(r_t|r_{t-1}) = \gamma_0 + \gamma_1 r_{t-1}. \tag{4.10}$$

Langkah selanjutnya adalah memperoleh variansi $r(T)$ jika $r(t)$ diketahui

$$\begin{aligned} var\big(r(T)|r(t)\big) &= var\Bigg(r(t)e^{-(T-t)\alpha} + \mu - \mu e^{-(T-u)\alpha} \\ &\quad + \int_t^T e^{-(T-u)\alpha}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u)\Big|r(t)\Bigg) \\ &= var\Bigg(r(t)e^{-(T-t)\alpha} + \mu - \mu e^{-(T-u)\alpha}\Big|r(t)\Bigg) \\ &\quad + var\Bigg(\int_t^T e^{-(T-u)\alpha}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u)\Big|r(t)\Bigg) \\ &= 0 + var\Bigg(\int_t^T e^{-(T-u)\alpha}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u)\Big|r(t)\Bigg) \\ &= var\Bigg(\int_t^T e^{-(T-u)\alpha}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u)\Big|r(t) (4.11) \end{aligned}$$

Untuk
$var\Bigg(\int_t^T e^{-(T-u)\alpha}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u)\Big|r(t)\Bigg) =$
$E\big[\big(\int_t^T e^{-(T-u)\alpha}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u)\big)^2\big|r(t)\big] - \big[E\big(\int_t^T e^{-(T-u)\alpha}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u)\big|r(t)\big)\big]^2.$

Menggunakan sifat Integral Ito pada persamaan (2.4) dan (2.5), persamaan (4.12) menjadi

$$
\begin{aligned}
var\Big(r(T)\big|r(t)\Big) &= E\bigg[\bigg(\int_t^T e^{-(T-u)\alpha}\sigma\sqrt{r(u)}dW(u)\bigg)^2\Big|r(t)\bigg] \\
&= E\bigg[\sigma^2\bigg(\int_t^T e^{-\alpha T}e^{\alpha u}\sqrt{r(u)}dW(u)\bigg)^2\Big|r(t)\bigg] \\
&= E\bigg[\sigma^2 e^{-2\alpha T}\bigg(\int_t^T e^{\alpha u}\sqrt{r(u)}dW(u)\bigg)^2\Big|r(t)\bigg] \\
&= \sigma^2 e^{-2\alpha T}E\bigg[\int_t^T e^{2\alpha u}r(u)du\Big|r(t)\bigg] \\
&= \sigma^2 e^{-2\alpha T}\bigg(\int_t^T e^{2\alpha u}E\big[r(u)\big|r(t)\big]du\bigg) \\
&= \sigma^2 e^{-2\alpha T}\bigg(\int_t^T e^{2\alpha u}\big(e^{-(u-t)\alpha}r(t) \\
&\quad +\mu-\mu e^{-(u-t)\alpha}du\big)\bigg) \\
&= \sigma^2 e^{-2\alpha T}\bigg(\int_t^T \big(r(t)e^{\alpha u}e^{\alpha t}+\mu e^{2\alpha u} \\
&\quad -\mu e^{\alpha u}e^{\alpha t}\big)du\bigg) \\
&= \sigma^2 e^{-2\alpha T}\bigg(r(t)e^{\alpha t}\int_t^T e^{\alpha u}du+\mu\int_t^T e^{2\alpha u}du \\
&\quad -\mu e^{\alpha t}\int_t^T e^{\alpha u}du\bigg) \\
&= \sigma^2 e^{-2\alpha T}\bigg(\frac{r(t)e^{\alpha t}}{\alpha}(e^{\alpha T}-e^{\alpha t})+\frac{\mu}{2\alpha}(e^{2\alpha T}-e^{2\alpha t}) \\
&\quad -\frac{\mu e^{\alpha t}}{\alpha}(e^{\alpha T}-e^{\alpha t})\bigg).
\end{aligned}
$$

Sehingga variansi dari tingkat bunga pada saat T jika diketahui tingkat suku bunga pada saat t adalah

$$
\begin{aligned}
var\Big(r(T)\Big|r(t)\Big) &= \sigma^2 e^{-2\alpha T}\Bigg(\frac{r(t)e^{\alpha t}}{\alpha}(e^{\alpha T}-e^{\alpha t}) \\
&\quad +\frac{\mu}{2\alpha}(e^{2\alpha T}-e^{2\alpha t})-\frac{\mu e^{\alpha t}}{\alpha}(e^{\alpha T}-e^{\alpha t})\Bigg) \\
&= \frac{\sigma^2 r(t)}{\alpha}(e^{-\alpha(T-t)}-e^{-2\alpha(T-t)})+\frac{\mu\sigma^2}{2\alpha} \\
&\quad -\frac{\mu\sigma^2}{2\alpha}e^{-2\alpha(T-t)}-\frac{\mu\sigma^2}{\alpha}e^{-\alpha(T-t)} \\
&\quad +\frac{\mu\sigma^2}{\alpha}e^{-2\alpha(T-t)} \\
&= \frac{\sigma^2 r(t)}{\alpha}(e^{-\alpha(T-t)}-e^{-2\alpha(T-t)}) \\
&\quad +\frac{\mu\sigma^2}{2\alpha}(1-2e^{-\alpha(T-t)}+e^{-2\alpha(T-t)}) \\
&= \frac{\sigma^2 r(t)}{\alpha}(e^{-\alpha\triangle t}-e^{-2\alpha\triangle t}) \\
&\quad +\frac{\mu\sigma^2}{2\alpha}(1-e^{-\alpha\triangle t})^2 \\
&= \sigma^2\Bigg(\frac{\mu}{2\alpha}(1-e^{-\alpha\triangle t})^2+\frac{r(t)}{\alpha}(e^{-\alpha\triangle t}-e^{-2\alpha\triangle t})\Bigg).
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Dengan $r(T) = r_t$ dan $r(t) = r_{t-1}$ maka *conditional variance function* untuk model tingkat suku bunga CIR adalah

$$
\begin{aligned}
v(r;\theta) &= var(r(T)|r(t)) = var(r_t|r_{t-1}) \\
&= E\Big[\big(r_t - E[r_t|r_{t-1}]\big)^2\Big|r_{t-1}\Big] \qquad (4.13) \\
&= \sigma^2\Bigg(\frac{\mu}{2\alpha}(1-e^{-\alpha\triangle t})^2+\frac{r(t)}{\alpha}(e^{-\alpha\triangle t}-e^{-2\alpha\triangle t})\Bigg) \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

Ekspektasi dan variansi bersyarat yang diperoleh akan digunakan untuk mencari estimasi parameter dari model CIR.

4.3 Estimasi Parameter ($\hat{\alpha}, \hat{\mu}$, dan $\hat{\sigma}^2$)

Pada Tugas Akhir ini metode CLSE (*conditional least square estimation*) digunakan untuk mengestimasi parameter α, μ, dan σ. Ada dua langkah yang dilakukan dalam estimasi model tingkat suku bunga ini, yaitu dengan *conditional mean function* untuk mengestimasi α dan μ, dan *conditional variance function* untuk mengestimasi σ.

Pada bab (4.2) telah diperoleh *conditional mean function* dari model tingkat suku bunga CIR yaitu persamaan (4.10). Berdasarkan *conditional mean function* maka model CIR untuk waktu diskrit pada persamaan (4.8) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$r_t = \gamma_0 + \gamma_1 r_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{4.15}$$

dengan

$$\varepsilon_t = \int_{t-1}^{t} e^{-\alpha \triangle t} \sigma \sqrt{r_u} dW_u.$$

$\{\varepsilon_t\}$ adalah *martingale increment* yang berdistribusi identik dan independent $(i.i.d)$ dan $E\big[\varepsilon_t | r_{t-1}\big] = 0$.

Estimasi parameter $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\mu}$ dapat diperoleh dengan cara meminimumkan fungsi jumlah kuadrat bersyarat yaitu

$$f_\theta(r_t) = \sum_{t=1}^{n} (r_t - E(r_t | r_{t-1}))^2, \tag{4.16}$$

menggunakan turunan pertama $f_\theta(r_t)$ terhadap γ_0 dan γ_1 sehingga dapat diperoleh $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\mu}$. Berikut penjabaran turunan pertama $f_\theta(r_t)$ terhadap γ_0 dan γ_1.

1. Untuk $\hat{\gamma}_0$

$$\begin{aligned}
f_\theta(r_t) &= \sum_{t=1}^{n}(r_t - m(r;\theta))^2 \\
f_\theta(r_t) &= \sum_{t=1}^{n}(r_t - E(r_t|r_{t-1}))^2 \\
f_\theta(r_t) &= \sum_{t=1}^{n}(r_t - \gamma_0 - \gamma_1 r_{t-1})^2
\end{aligned}$$

Solusi γ_0 yang meminimumkan fungsi jumlah kuadrat bersyarat $f_\theta(r_t)$ diperoleh menggunakan turunan pertama fungsi $f_\theta(r_t)$ terhadap γ_0, yaitu dengan menyelesaikan persamaan $\dfrac{\partial f_\theta(r_t)}{\partial \gamma_0} = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sum_{t=1}^{n}(r_t - \gamma_0 - \gamma_1 r_{t-1})^2}{\partial \gamma_0} &= 0 \\
-2\sum_{t=1}^{n} r_t + 2\gamma_1 \sum_{t=1}^{n} r_{t-1} + 2\hat{\gamma}_0 &= 0 \\
-2\sum_{t=1}^{n}(r_t - \hat{\gamma}_0 - \gamma_1 r_{t-1}) &= 0 \\
\sum_{t=1}^{n} r_t - n\hat{\gamma}_0 - \gamma_1 \sum_{t=1}^{n} r_{t-1} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n\hat{\gamma}_0 &= \sum_{t=1}^{n} r_t - \gamma_1 \sum_{t=1}^{n} r_{t-1} \\
\hat{\gamma}_0 &= \frac{\sum_{t=1}^{n} r_t - \gamma_1 \sum_{t=1}^{n} r_{t-1}}{n}. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

2. Untuk $\hat{\gamma}_1$

Solusi γ_1 yang meminimumkan fungsi jumlah kuadrat bersyarat $f_\theta(r_t)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $\frac{\partial f_\theta(r_t)}{\partial \gamma_1} = 0$, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^{n}(r_t - \gamma_0 - \gamma_1 r_{t-1})^2}{\partial \gamma_1} = 0$$

$$\begin{aligned}
-2\sum_{t=1}^{n} r_t r_{t-1} + 2\hat{\gamma}_0 \sum_{t=1}^{n} r_{t-1} + 2\hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^{n} r_{t-1}^2 &= 0 \\
-2r_{t-1}\sum_{t=1}^{n}(r_t - \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1 r_{t-1}) &= 0 \\
\sum_{t=1}^{n} r_t r_{t-1} - \hat{\gamma}_0 \sum_{t=1}^{n} r_{t-1} - \hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^{n} r_{t-1}^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Selanjutnya subtitusi persamaan (4.17) sehingga diperoleh

$$\sum_{t=1}^{n} r_t r_{t-1} - \left(\frac{\sum_{t=1}^{n} r_t - \hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^{n}}{n}\right)\sum_{t=1}^{n} r_{t-1} - \hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^{n} r_{t-1}^2 = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} r_t r_{t-1} - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t \sum_{t=1}^{n} r_{t-1} + \frac{\hat{\gamma}_1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_{t-1}\sum_{t=1}^{n} r_{t-1} - \hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^{n}(r_{t-1})^2 = 0$$

$$\hat{\gamma}_1\left[\sum_{t=1}^{n}(r_{t-1})^2 - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_{t-1}\sum_{t=1}^{n} r_{t-1}\right] = \sum_{t=1}^{n} r_t \sum_{t=1}^{n} r_{t-1} - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t \sum_{t=1}^{n} r_{t-1}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^{n} r_t r_{t-1} - \frac{1}{n}\sum t = 1^n r_t \sum_{t=1}^{n} r_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}(r_{t-1})^2 - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_{t-1}\sum_{t=1}^{n} r_{t-1}} \\
\hat{\gamma}_1 &= \frac{n\sum_{t=1}^{n} r_t r_{t-1} - \sum_{t=1}^{n} r_t \sum_{t=1}^{n} r_{t-1}}{n\sum_{t=1}^{n}(r_{t-1})^2 - (\sum_{t=1}^{n} r_{t-1})^2}. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Menggunakan persamaan (4.18), maka dapat dicari estimator dari α yakni

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_1 = e^{-\hat{\alpha}\triangle t} &= \frac{n\sum_{t=1}^{n} r_t r_{t-1} - \sum_{t=1}^{n} r_t \sum_{t=1}^{n} r_{t-1}}{n\sum_{t=1}^{n}(r_{t-1})^2 - (\sum_{t=1}^{n} r_{t-1})^2} \\
ln(e^{-\hat{\alpha}\triangle t}) &= ln\left[\frac{n\sum_{t=1}^{n} r_t r_{t-1} - \sum_{t=1}^{n} r_t \sum_{t=1}^{n} r_{t-1}}{n\sum_{t=1}^{n}(r_{t-1})^2 - (\sum_{t=1}^{n} r_{t-1})^2}\right] \\
-\hat{\alpha} \triangle t &= ln\left[\frac{n\sum_{t=1}^{n} r_t r_{t-1} - \sum_{t=1}^{n} r_t \sum_{t=1}^{n} r_{t-1}}{n\sum_{t=1}^{n}(r_{t-1})^2 - (\sum_{t=1}^{n} r_{t-1})^2}\right] \\
\hat{\alpha} &= -\frac{1}{\triangle t} ln\left[\frac{n\sum_{t=1}^{n} r_t r_{t-1} - \sum_{t=1}^{n} r_t \sum_{t=1}^{n} r_{t-1}}{n\sum_{t=1}^{n}(r_{t-1})^2 - (\sum_{t=1}^{n} r_{t-1})^2}\right].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Untuk estimator kuadrat terkecil bersyarat μ dapat diperoleh dengan

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_0 &= \hat{\mu}(1 - e^{-\alpha\triangle t}) \\
\hat{\mu} &= \frac{\hat{\gamma}_0}{(1 - e^{-\alpha\triangle t})}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Subtitusikan $\hat{\gamma}_0$ pada persamaan (4.17) ke persamaan (4.20) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \frac{\frac{\sum_{t=1}^{n} r_t - \hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^{n} r_{t-1}}{n}}{(1 - e^{-\alpha\triangle t})} \\
&= \frac{\sum_{t=1}^{n} r_t - e^{-\hat{\alpha}\triangle t} \sum_{t=1}^{n} r_{t-1}}{n(1 - e^{-\alpha\triangle t})}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Untuk estimator dari σ^2 dapat diperoleh dengan menggunakan *conditional variance function*. *Conditional variance function* untuk model CIR adalah persamaan (4.13).

$$v(r;\theta) = E\left[\left(r_t - E[r_t|r_{t-1}]\right)^2 \Big| r_{t-1}\right] = var\left(r_t \big| r_{t-1}\right). \tag{4.22}$$

Berdasarkan persamaan (4.10) diperoleh

$$\begin{aligned} E\Big[\big(r_t - E[r_t|r_{t-1}]\big)^2\big|r_{t-1}\Big] &= E\Big[\big(r_t - m(r;\theta)\big)^2\big|r_{t-1}\Big] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\Big(r_t - m(r;\theta)\Big)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\Big(r_t - \big(\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 r_{t-1}\big)\Big)^2. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Dengan mensubtitusikan $\hat{\gamma}_0$ dan $\hat{\gamma}_1$ ke persamaan (4.23) sehingga persamaan dapat ditulis kembali menjadi

$$E\Big[\big(r_t - m(r;\theta)\big)^2\big|r_{t-1}\Big] = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\Big(r_t - \big(\hat{\mu}(1-e^{-\hat{\alpha}\triangle t}) + e^{-\hat{\alpha}\triangle t}r_{t-1}\big)\Big)^2. \tag{4.24}$$

Berdasarkan persamaan (4.12) dan (4.24) dapat diperoleh estimator untuk σ^2, yaitu

$$var(r_t|r_{t-1}) = \hat{\sigma}^2\bigg(\frac{\hat{\mu}}{2\hat{\alpha}}(1-e^{-\hat{\alpha}\triangle t})^2 + \frac{r(t)}{\hat{\alpha}}e^{-\hat{\alpha}\triangle t} - e^{-2\hat{\alpha}\triangle t})\bigg)\bigg)$$

$$E\Big[\big(r_t - m(r;\theta)\big)^2\big|r_{t-1}\Big] = \hat{\sigma}^2\bigg(\frac{\hat{\mu}}{2\hat{\alpha}}(1-e^{-\hat{\alpha}\triangle t})^2 + \frac{r(t)}{\hat{\alpha}}e^{-\hat{\alpha}\triangle t}\bigg)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\Big(r_t - \big(\hat{\mu}(1-e^{-\hat{\alpha}\triangle t}) + e^{-\hat{\alpha}\triangle t}r_{t-1}\big)\Big)^2 = \hat{\sigma}^2\bigg(\frac{\hat{\mu}}{2\hat{\alpha}}(1-e^{-\hat{\alpha}\triangle t})^2 + \frac{r(t)}{\hat{\alpha}}e^{-\hat{\alpha}\triangle t}\bigg)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\big(r_t - (\hat{\mu}(1-e^{-\hat{\alpha}\triangle t}) + e^{-\hat{\alpha}\triangle t}r_{t-1})\big)^2}{\Big(\frac{1}{\hat{\alpha}}r_{t-1}(e^{-\hat{\alpha}\triangle t} - e^{-2\hat{\alpha}\triangle t}) + \frac{\hat{\mu}}{2\hat{\alpha}}(1-2e^{-\hat{\alpha}\triangle t} + e^{-2\hat{\alpha}\triangle t})\Big)}. \tag{4.25}$$

Estimator $\hat{\sigma}$ dapat diperoleh dari $\sqrt{\hat{\sigma}^2}$.

4.4 Rumusan Manfaat Pensiun

Rumusan manfaat pensiun yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah rumusan manfaat pensiun untuk pegawai negeri sipil yang dikelola oleh PT. Taspen (Persero). Rumusan manfaat pensiun di PT. Taspen (Persero) telah diatur berdasarkan Surat Menteri Keuangan Nomor: S-41 /MK.06/2008 tanggal 21 Januari 2009 perihal Formula Biaya Penyelenggaraan Dana Pensiun Pegawai Negeri Sipil (PNS). Berdasarkan peraturan, rumusan manfaat pensiun normal untuk PNS merupakan rumusan manfaat pensiun berdasarkan gaji terakhir seperti persamaan (2.16), yaitu

$$B_r = k(r-y)s_{r-1}.$$

Menurut Surat Menteri Keuangan, k merupakan faktor penghargaan atau persentase dari gaji yang diberikan yaitu sebesar 2.5% dan s_{r-1} merupakan gaji terakhir sebelum pensiun. Gaji terakhir sebelum pensiun pada PNS disebut dengan penghasilan dasar pensiun (PhDP), sehingga rumusan manfaat pensiun untuk PNS adalah

$$B_r = 2.5\%(r-y)(PhDP). \tag{4.26}$$

Berdasarkan peraturan PT. Taspen (Persero), besar manfaat pensiun untuk PNS, maksimum adalah 75% dari PhDP. Sehingga perlu diketahui terlebih dahulu prosen pensiun peserta. Prosen pensiun adalah persentase dari gaji yang menjadi manfaat pensiun setiap bulan yaitu

$$\begin{aligned} \text{Prosen pensiun} &= \text{min(2.5\% x total masa kerja; 75\%)} \\ &= \text{min(2.5\% x } (r-y); 75\%). \end{aligned}$$

Sehingga rumusan manfaat pensiun menjadi

$$\begin{aligned} B_r &= (Prosen\ pensiun)(PhDP) \\ &= (min(2.5\%(r-y); 75\%))(PhDP) \end{aligned} \tag{4.27}$$

dengan

B_r	:	manfaat pensiun yang akan diterima oleh peserta pensiun
$r - y$	:	masa kerja dari usia masuk kerja (y) tahun sampai usia pensiun (r) tahun
PhDP	:	gaji terakhir sebelum pensiun.

Manfaat pensiun tersebut selanjutnya dialokasikan ke setiap tahun masa kerja peserta pensiun agar dapat terdanai oleh iuran yang dinamakan *accrual benefit* (b_x). Besar *accrual benefit* untuk setiap tahun masa kerja adalah

$$b_x = \frac{B_r}{S_r} s_x. \tag{4.28}$$

S_r adalah jumlah gaji seluruhnya sampai sebelum pensiun dan s_x adalah gaji peserta saat berusia x tahun. Kemudian persamaan (4.27) disubtitusikan ke persamaan (4.28), sehingga diperoleh

$$b_x = \frac{\big((min(2.5\%(r-y); 75\%))(PhDP)\big)}{S_r} s_x. \tag{4.29}$$

Persamaan (4.29) ini yang digunakan untuk menghitung iuran normal.

4.5 Rumusan Iuran Normal Pensiun

Iuran normal (NC) adalah iuran tahunan yang dibayarkan peserta kepada lembaga pengelola dana pensiun setiap tahun masa kerja peserta aktif [1]. Pada prinsipnya, iuran normal yang dibayarkan oleh peserta pensiun merupakan nilai sekarang dari manfaat pensiun yang akan diterima oleh peserta pensiun pada saat pensiun sampai peserta pensiun meninggal dunia. Secara umum, rumusan iuran normal dengan menggunakan metode pendanaan program pensiun manfaat pasti untuk pensiun normal adalah seperti persamaan

(2.10), yaitu

$$(NC)_x = b_x \ddot{a}_r v^{r-x} \ {}_{r-x}p_x. \tag{4.30}$$

$\ddot{a}_r$ merupakan anuitas seumur hidup due diskrit dengan menggunakan persamaan (2.14). v^{r-x} merupakan faktor diskonto untuk menghitung *present value* dari manfaat yang dibayarkan. Faktor diskonto dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.15) dan ${}_{r-x}p_x$ adalah peluang peserta program pensiun tetap bekerja. Peluang tersebut diperoleh dengan menggunakan tabel penurunan populasi yang digunakan oleh PT. Taspen (Persero) yaitu tabel penurunan populasi Winklevoss.

Untuk menghitung peluang seseorang tetap hidup digunakan Tabel Mortalita Taspen (TMT) 2012. Tabel mortalita tersebut merupakan tabel mortalita terbaru yang digunakan di PT. Taspen untuk menghitung peluang hidup PNS. Berdasarkan TMT 2012, usia tertinggi yang dapat dicapai seseorang tetap hidup adalah 111 tahun, sehingga perhitungan anuitas pada persamaan (2.14) menjadi

$$\begin{aligned} \ddot{a}_r &= \sum_{x=r}^{111-1} v^{r-x} \ {}_{x-r}p_r \\ &= \sum_{x=r}^{110} v^{r-x} \ {}_{x-r}p_r. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (2.15) dan (4.31) ke persamaan (4.30) diperoleh,

$$\begin{aligned} (NC)_x &= \left(\frac{B_r}{S_r} s_x\right) \left(\prod_{t=x}^{r} \frac{1}{(1+r_t)}\right) \left(\sum_{x=r}^{110} v^{r-x} \ {}_{x-r}p_r\right) \\ &\quad \left({}_{r-x}p_x\right) \end{aligned} \tag{4.32}$$

Persamaan (2.10) merupakan rumus untuk menghitung iuran normal yang digunakan pada Tugas Akhir ini.

4.6 Implementasi Model CIR untuk Mengaproksimasi Tingkat Suku Bunga

Subbab ini menjelaskan mengenai implementasi model CIR untuk menngaproksimasi tingkat suku bunga. Langkah pertama yang dilakukan adalah mengumpulkan data tingkat suku bunga yang berlaku di pasar. Pada Tugas Akhir ini, digunakan data tingkat suku bunga dari Bank Indonesia yaitu BI *Rate* mulai dari Januari 2007 hingga Desember 2014.

Setelah memperoleh data, langkah berikutnya adalah mengestimasi parameter-parameter model CIR dengan menggunakan data BI *Rate*. Adapun metode estimasi yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah metode *conditional least square estimation* (CLSE). Parameter yang diestimasi yaitu α, μ dan σ. Estimasi parameter α dapat diperoleh dengan mensubtitusikan data BI *Rate* ke persamaan (4.19) dan nilai parameter μ dapat diperoleh menggunakan persamaan (4.21) serta nilai sigma dapat diperoleh menggunakan persamaan (4.25).

Hasil estimasi parameter dari model CIR, selanjutnya disubtitusikan ke metode Milstein untuk dilakukan simulasi lintasan aproksimasi tingkat suku bunga. Pada Tugas Akhir ini, batas toleransi yang digunakan adalah 10^{-5}. Metode Milstein untuk tingkat suku bunga model CIR dengan interval waktu $[0, T]$ diberikan oleh persamaan (2.8),

$$\begin{aligned} r_t &= r_{t-1} + \alpha(\mu - r_{t-1}) \triangle t + \sigma\sqrt{r_{t-1}}(W(\tau_t) - W(\tau_{t-1})) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{r_{t-1}}\Big(\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{r_{t-1}}}\Big)\big((W(\tau_t) - W(\tau_{t-1}))^2 - \triangle t\big), \\ &= r_{t-1} + \alpha(\mu - r_{t-1}) \triangle t + \sigma\sqrt{r_{t-1}}(W(\tau_t) - W(\tau_{t-1})) \\ &\quad + \frac{1}{4}\sigma^2\big((W(\tau_t) - W(\tau_{t-1}))^2 - \triangle t\big). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Simulasi Milstein dilakukan sebanyak 100 kali, sehingga terbentuk lebih dari satu buah lintasan tingkat suku bunga.

Dari lintasan-lintasan tersebut dibentuk satu lintasan tingkat suku bunga yang merupakan rata-ratanya. Lintasan tingkat suku bunga dengan aproksimasi terbaik merupakan lintasan tingkat suku bunga yang memiliki nilai minimum dari mean *error* simulasinya (MAPE) dibandingkan data sebenarnya. Lintasan inilah yang digunakan untuk mendekati tingkat suku bunga BI *Rate*. Berikut ini dijabarkan implementasi model CIR untuk mendekati tingkat suku bunga beserta hasilnya.

4.6.1 Impementasi model CIR untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga untuk jangka waktu 2 tahun

Dalam implementasi ini, diteliti apakah model CIR cukup baik dalam mengaproksimasi tingkat suku bunga untuk jangka waktu 2 tahun dimulai dari Januari 2007, dengan nilai estimasi parameter diperoleh dari data yang sama. Pada Tugas Akhir ini, hasil aproksimasi terbaik dari model CIR dilihat berdasarkan nilai MAPE dan pola pergerakan tingkat suku bunga hasil simulasi dibandingkan dengan data yang sebenarnya. Hasil aproksimasi dikategorikan baik apabila nilai MAPE semakin kecil mengikuti Tabel 2.1.

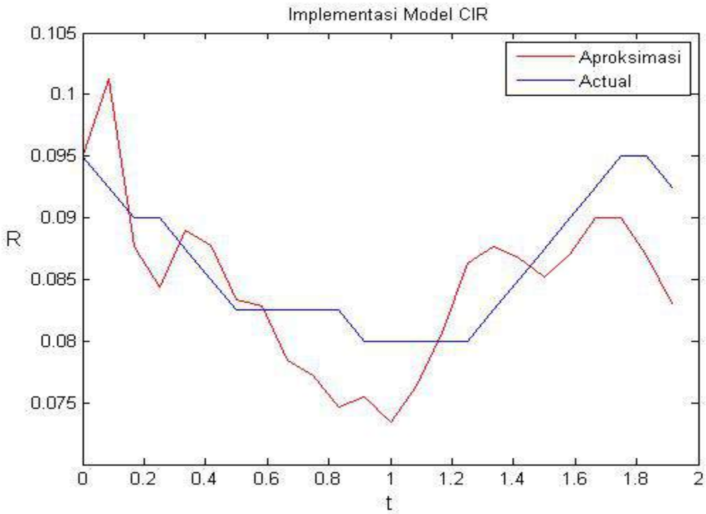
Dengan menggunakan metode CLSE dan data BI *Rate* dari Januari 2007 sampai Desember 2008, diperoleh hasil estimasi parameter sebagai berikut.

Tabel 4.1: Hasil Estimasi Parameter Model CIR

Estimasi Parameter	$\hat{\alpha}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Hasil	0.5623	0.0852	0.0863

Hasil estimasi parameter tersebut digunakan untuk membentuk lintasan aproksimasi tingkat suku bunga dengan menggunakan simulasi Milstein pada persamaan (4.33) dengan nilai awal adalah data BI *Rate* Januari 2007. Berdasarkan hasil simulasi, diperoleh MAPE sebesar 4.72%.

Untuk melihat pola pergerakan tingkat suku bunga, disajikan grafik hasil simulasi pola pergerakan tingkat suku bunga pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1: Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Jangka Waktu 2 Tahun

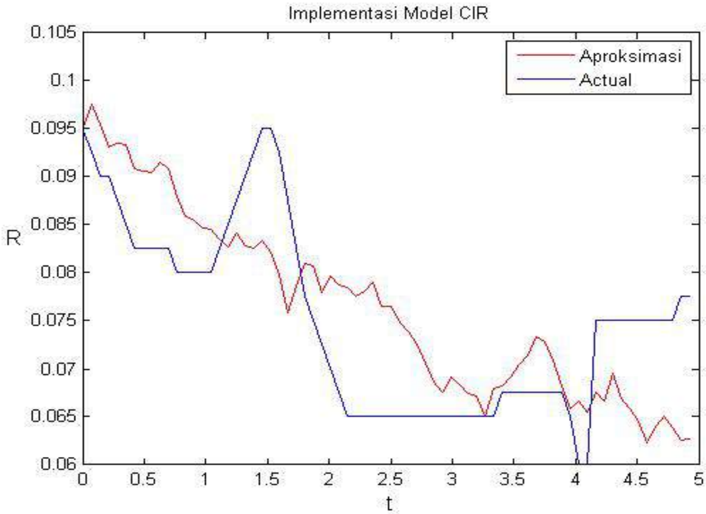
Berdasarkan Gambar 4.1, terlihat bahwa pola pergerakan tingkat suku bunga hasil aproksimasi dengan model CIR cukup baik dalam mengikuti pola pergerakan data sebenarnya. Berdasarkan hasil dari MAPE dan pola pergerakan tingkat suku bunga, dapat disimpulkan bahwa model CIR baik dalam mengaproksimasi tingkat suku bunga untuk jangka waktu 2 tahun dengan estimasi parameter diperoleh dari data yang sama walaupun pola pergerakan belum sepenuhnya mengikuti pola pergerakan data sebenarnya.

4.6.2 Impementasi model CIR untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga untuk jangka waktu 5 tahun

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada implementasi bab 4.6.1, dapat diteliti lebih lanjut dari model CIR dalam mengaproksimasi tingkat suku bunga untuk jangka waktu yang panjang, seperti 5 tahun. Untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga dalam jangka waktu 5 tahun, digunakan data BI *Rate* dari Januari 2007 sampai dengan Desember 2011. Estimasi parameter diperoleh dari data BI *Rate* yang sama.

Menggunakan cara yang sama seperti bab 4.6.1, diperoleh hasil estimasi untuk parameter $\hat{\alpha} = 0.5369$, $\hat{\mu} = 0.0711$, dan $\hat{\sigma} = 0.0594$. Nilai estimasi parameter tersebut kemudian disubtitusikan ke skema simulasi Milstein di persamaan (4.33) untuk diperoleh hasil penyelesaiannya. Dari hasil simulasi menggunakan metode Milstein diperoleh nilai MAPE sebesar 9.34%. Pada bab 6.4.1, terlihat pola pergerakan tingkat suku bunga hasil aproksimasi dengan model CIR untuk jangka waktu 2 tahun cukup mengikuti data sebenarnya. Selanjutnya untuk melihat apakah hal tersebut berlaku juga untuk data dengan jangka waktu 5 tahun, dilakukan simulasi dengan hasil ditampilkan melalui Gambar 4.2.

Dari Gambar 4.2 terlihat bahwa untuk data dengan jangka waktu 5 tahun, pola pergerakan tingkat suku bunga hasil pendekatan kurang dapat mengikuti pola pergerakan data yang sebenarnya. Namun melihat nilai MAPE yang dihasilkan kurang dari 10% maka hasil aproksimasi masih dikategorikan baik.

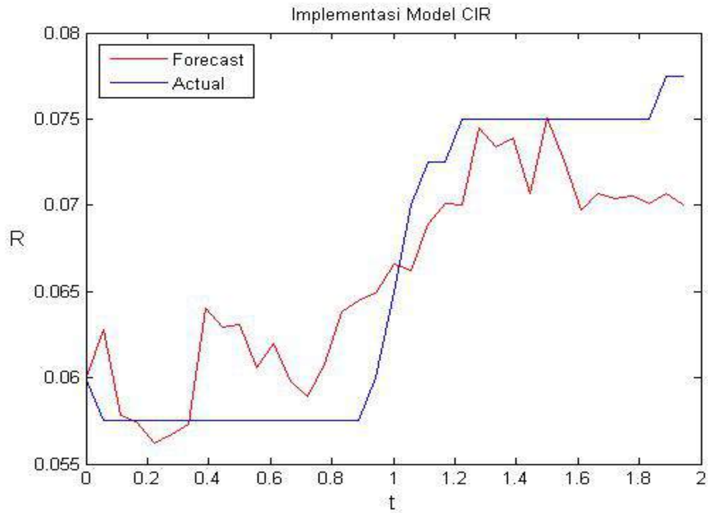


Gambar 4.2: Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Jangka Waktu 5 Tahun

4.6.3 Implementasi model CIR untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga jangka waktu 3 tahun berikutnya, dengan nilai parameter dari data sebelumnya

Pada implementasi ini dilakukan pendekatan tingkat suku bunga dengan estimasi parameter diperoleh menggunakan data sebelumnya. Data yang digunakan untuk estimasi parameter adalah data BI *Rate* dari Januari 2007 sampai dengan Desember 2011. Hasil estimasi tersebut kemudian digunakan untuk mendekati data 3 tahun berikutnya yaitu Januari 2012 sampai Desember 2014. Karena data yang digunakan untuk estimasi parameter adalah data yang sama seperti pada bab 4.6.2, maka hasil estimasi parameternya sama seperti pada bab 4.6.2. Dengan metode CLSE, diperoleh hasil estimasi parameter yaitu $\hat{\alpha} = 0.5369$, $\hat{\mu} = 0.0711$, dan $\hat{\sigma} = 0.0594$. Selanjutnya, hasil estimasi parameter tersebut digunakan untuk membentuk lintasan aproksimasi untuk jangka waktu 3 tahun menggunakan simulasi Milstein di persamaan (4.33) dengan nilai awal data BI *Rate* Januari 2012.

Berdasarkan hasil simulasi diperoleh MAPE dalam mengaproksimasi tingkat suku bunga yaitu sebesar 5.19%. Walaupun pola pergerakan tingkat suku bunga hasil aproksimasi dengan model CIR tidak seluruhnya mengikuti data yang sebenarnya (Gambar 4.3), namun error yang dihasilkan lebih kecil dibandingkan dengan hasil pada bab 4.6.2. Hal ini disebabkan fluktuasi data *actual* yang digunakan pada bab 4.6.2 besar, terlihat dari data BI *Rate* pertama Januari 2007 sebesar 9.5% tetapi data BI *Rate* terakhir Desember 2011 sebesar 7.75%.



Gambar 4.3: Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga untuk Jangka Waktu 3 Tahun Berikutnya

Berdasarkan hasil implementasi yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa model CIR lebih baik digunakan pada data dengan fluktuasi yang tidak terlalu besar. Model CIR juga cukup baik digunakan untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga pada tahun berikutnya meski menggunakan estimasi parameter dari data tahun sebelumnya. Semakin banyak data yang diperoleh untuk menaksir parameter maka hasil aproksimasi untuk data berikutnya akan lebih baik.

4.7 Implementasi Model CIR untuk Menentukan Iuran Normal Pensiun

Subbab ini menjelaskan mengenai implementasi model CIR untuk menentukan iuran normal pensiun dengan menggunakan pendekatan tingkat suku bunga model CIR. Langkah pertama yang dilakukan adalah mengumpulkan data. Data yang digunakan sebagai implementasi pada Tugas Akhir ini berupa data yang diperoleh dari PT. Taspen (Persero) Kantor Cabang Utama Surabaya. Data yang digunakan berupa data tingkat suku bunga aktuaria yang digunakan, tabel penurunan populasi, tabel mortalita Taspen (TMT) 2012, dan ketentuan perumusan manfaat pensiun PNS.

Pada Tugas Akhir ini, tingkat suku bunga aktuaria yang digunakan untuk menentukan iuran normal pensiun mengikuti tingkat suku bunga BI *Rate*. Sehingga dalam implementasi digunakan data BI *Rate* dari Januari 2007 sampai Desember 2014. Penggunaan data BI *Rate* pada implementasi karena investasi PT. Taspen (Persero) didepositokan di beberapa bank-bank milik pemerintah (PMK No.199 tahun 2008) sehingga tingkat suku bunganya mengikuti BI *Rate*.

Pada bab 4.6, telah dilakukan implementasi model CIR untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga dalam jangka waktu tertentu, dengan estimasi parameter diperoleh dari data yang sama maupun data pada tahun sebelumnya. Hasil implementasi menunjukkan bahwa model CIR cukup baik dalam mengaproksimasi tingkat suku bunga.

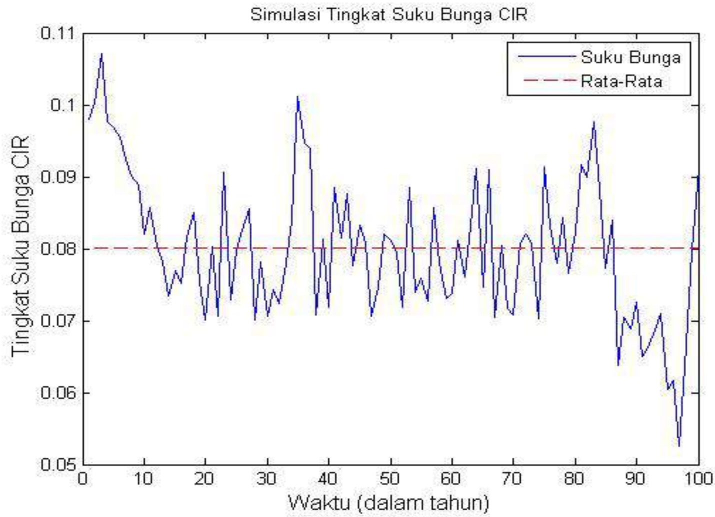
Berdasarkan hasil implementasi yang telah dilakukan, pada subbab ini dilakukan aproksimai tingkat suku bunga untuk jangka waktu n tahun ke depan dengan menggunakan hasil estimasi parameter dari data BI *Rate* Januari 2007 hingga Desember 2014. Dengan metode CLSE, diperoleh hasil estimasi parameter sebagai berikut:

Tabel 4.2: Hasil Estimasi Parameter Model CIR

Estimasi Parameter	$\hat{\alpha}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Hasil	0.5275	0.0666	0.04141

Hasil estimasi parameter model CIR yang diperoleh disubtitusikan ke metode Milstein di persamaan (4.33). Simulasi Milstein dilakukan sebanyak 100 kali dengan tingkat suku bunga awal menggunakan tingkat suku bunga terakhir yang digunakan PT. Taspen (Persero) yaitu $r(0) = 9.8\%$. Hasil simulasi Milstein akan membentuk lebih dari satu buah lintasan pendekatan tingkat suku bunga. Dari lintasan-lintasan tersebut, dibentuk satu lintasan pendekatan yang merupakan rata-ratanya. Rata-rata tersebut merupakan tingkat suku bunga model CIR $(r(t))$ pada saat t yang akan digunakan dalam penelitian ini.

Gambar 4.4 merupakan plot hasil simulasi tingkat suku bunga model CIR dengan metode Milstein yang merupakan hasil rata-rata dari beberapa lintasan tingkat suku bunga yang terbentuk. Tampak bahwa hasil simulasi berubah-ubah di sekitar rata-rata secara keseluruhan yaitu 0.08. Hasil simulasi tingkat suku bunga ini yang digunakan dalam perhitungan iuran normal.



Gambar 4.4: Hasil Simulasi Tingkat Suku Bunga Model CIR

Setelah memperoleh hasil simulasi tingkat suku bunga, selanjutnya dilakukan perhitungan untuk memperoleh iuran normal pensiun dengan menggunakan tingkat suku bunga hasil aproksimasi dengan model CIR (Lampiran C).

Dari PT. Taspen (Persero) diperoleh data seorang PNS dengan golongan 3C, mulai bekerja pada usia 25 tahun ($y = 25$) dan mulai menjadi peserta program pendanaan pensiun saat itu juga. Peserta akan pensiun pada saat berusia 58 tahun ($r = 58$). Gaji pokok awal peserta pensiun yaitu sebesar Rp. 2,517,800 per-bulan dan gaji terakhir sebelum pensiun adalah Rp. 4,135,200 per-bulan [16]. Perhitungan untuk iuran normal berdasarkan data pegawai yang diperoleh dari PT. Taspen (Persero) adalah sebagai berikut:

1. Manfaat pensiun normal

Berdasarkan data yang diperoleh, besar manfaat yang akan diterima oleh peserta pensiun dihitung dengan menggunakan persamaan (4.27). Perhitungan dilakukan per tahun sehingga PhDP dihitung per tahun. Besar manfaat pensiun maksimum adalah 75% dari PhDP sehingga besar manfaat pensiun yang diterima peserta adalah

$$\begin{aligned} B_{58} &= (min(2.5\%(r-y);\ 75\%))(PhDP) \\ &= (min(2.5\%(58-25);\ 75\%))(4,135,200)(12) \\ &= 75\%(12)(4,135,200) \\ &= 37,216,800 \end{aligned}$$

Jadi, manfaat pensiun normal yang akan dibayarkan kepada peserta setelah memasuki usia 58 tahun yaitu sebesar Rp 37,216,800 setiap tahunnya sampai awal tahun peserta pensiun meninggal dunia.

2. Perhitungan *accrual benefit*

Jumlah manfaat pensiun tersebut kemudian dialokasikan ke setiap tahun masa kerja peserta pensiun agar dapat terdanai, dinamakan dengan *accrual benefit* (b_x). Besar *accrual benefit* yang dialokasikan pada usia 25 tahun (b_{25}) dihitung menggunakan persamaan (4.28) dan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned} b_{25} &= \frac{(37,216,800)(30,213,600)}{1,282,108,800} \\ &= 877,034.39 \end{aligned}$$

Jadi, *accrual benefit* yang dialokasikan untuk peserta pada saat peserta berusia 25 tahun adalah sebesar Rp 877,034.39. Dari hasil perhitungan *accrual benefit*, selanjutnya dapat dihitung besar iuran normal yang harus dibayarkan oleh peserta pensiun untuk mendanai *acrual benefit* tersebut.

3. Perhitungan Iuran Normal Pensiun

Untuk menentukan iuran normal diperlukan *accrual benefit* pada usia 25 tahun, peluang seseorang akan tetap bekerja sampai usia pensiun, anuitas hidup dari usia 58 tahun serta faktor diskonto dengan (r_t) tingkat suku bunga pada saat t yang mengikuti model CIR (Lampiran C). Iuran normal pada usia 25 tahun dihitung dengan menggunakan persamaan (4.32) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}(NC)_{25} &= \left(\frac{B_{58}}{S_{58}} s_{25}\right)\left(\prod_{t=25}^{58} \frac{1}{(1+r_t)}\right)\left(\sum_{x=58}^{110} v^{58-x} \quad {}_{x-58}p_{58}\right) \\ &\quad \left({}_{58-25}p_{25}\right) \\ &= (877,034.39)(0.0669)(9.8509)(0.0971106) \\ &= 55,948.95\end{aligned}$$

Jadi, besar iuran normal pada usia 25 tahun yaitu sebesar Rp 55,948.95 untuk mendanai *accrual benefit* yang dialokasikan pada tahun tersebut sebesar Rp 877,034.39.

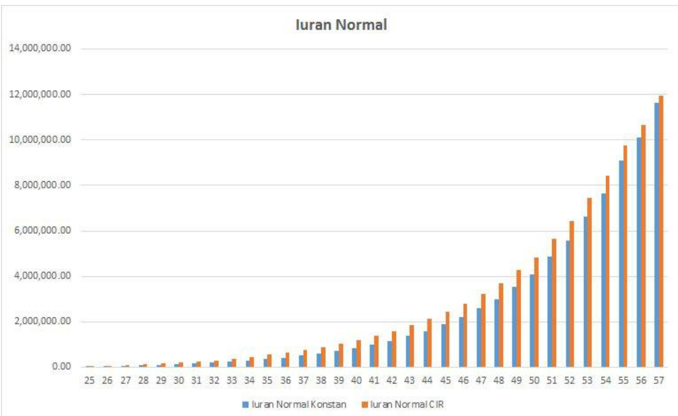
Besar iuran normal dihitung per tahun pada saat pegawai masuk menjadi peserta program pensiun sampai setahun sebelum pensiun (Lampiran H). Pada usia 25 tahun besarnya iuran yaitu Rp 55,948.95 per tahun untuk mendanai *accrual benefit* yang dialokasikan pada tahun tersebut yaitu sebesar Rp 877,034.39. Pada usia 57 tahun besarnya iuran yaitu sebesar Rp 11,949,003.61 per tahun untuk mendanai *accrual benefit* sebesar Rp 1,440,429.19. Peserta pensiun dengan gaji akhir sebelum pensiun sebesar Rp 49,622,400 per tahun, akan mendapatkan manfaat pensiun normal sebesar Rp 37,216,800 setiap tahunnya atau sebesar Rp 3,101,400 setiap bulan. Manfaat pensiun diperoleh mulai dari usia 58 tahun dan berakhir pada awal tahun peserta meninggal. Untuk mendapatkan manfaat pensiun tersebut, peserta pensiun harus membayarkan iuran dari usia 25 tahun sampai usia 57 tahun. Berikut hasil perhitungan iuran normal dengan tingkat suku bunga mengikuti model CIR.

Tabel 4.3: Hasil Perhitungan PhDP, *Accrual Benefit*, dan Iuran Normal

Usia	**r(t) CIR**	**Gaji** (per tahun dalam Rupiah)	***Accrual Benefit*** (per tahun Rupiah)	**Iuran Normal** (per tahun Rupiah)
25	0.09800	30,213,600	877,034.39	55,948.95
26	0.10021	30,213,600	877,034.39	73,340.26
27	0.10709	31,165,200	904,657.25	97,850.39
28	0.09760	31,165,200	904,657.25	125,577.01
29	0.09700	32,146,800	933,150.94	162,725.48
30	0.09555	32,146,800	933,150.94	201,965.91
31	0.09228	33,159,600	962,550.29	255,577.54
32	0.09017	33,159,600	962,550.29	309,677.51
33	0.08887	34,203,600	992,855.32	383,003.93
34	0.08206	34,203,600	992,855.32	455,267.56
35	0.08577	35,280,000	1,024,100.84	550,961.99
36	0.08025	35,280,000	1,024,100.84	644,772.34
37	0.07808	36,391,200	1,056,356.54	770,369.31
38	0.07337	36,391,200	1,056,356.54	886,532.50
39	0.07685	37,538,400	1,089,657.23	1,043,647.77
40	0.07513	37,538,400	1,089,657.23	1,190,877.47
41	0.08164	38,720,400	1,123,968.09	1,395,471.16
42	0.08506	38,720,400	1,123,968.09	1,591,092.88
43	0.07532	39,939,600	1,159,358.79	1,873,829.23
44	0.07000	39,939,600	1,159,358.79	2,117,181.08
45	0.08019	41,197,200	1,195,864.15	2,452,727.96
46	0.07068	41,197,200	1,195,864.15	2,778,958.33
47	0.09068	42,495,600	1,233,553.85	3,217,432.40
48	0.07290	42,495,600	1,233,553.85	3,678,023.34
49	0.07983	43,833,600	1,272,393.05	4,266,090.46
50	0.08246	43,833,600	1,272,393.05	4,828,896.34
51	0.08546	45,213,600	1,312,451.41	5,653,180.88

Usia	**r(t) CIR**	**Gaji** (per tahun dalam Rupiah)	***Accrual Benefit*** (per tahun Rupiah)	**Iuran Normal** (per tahun Rupiah)
52	0.07003	45,213,600	1,312,451.41	6,435,616.60
53	0.07808	46,638,000	1,353,798.62	7,452,548.85
54	0.07070	46,638,000	1,353,798.62	8,431,498.67
55	0.07435	48,106,800	1,396,434.65	9,774,464.40
56	0.07236	48,106,800	1,396,434.65	10,644,691.07
57	0.07805	49,622,400	1,440,429.19	11,949,003.61
S_r		1,282,108,800		

Sebagai perbandingan, dihitung iuran normal dengan tingkat suku bunga tetap sebesar 9.8% (lampiran H). Perbandingan antara iuran normal pensiun dengan tingkat suku bunga model CIR dan tingkat suku bunga tetap disajikan dalam bentuk grafik (Gambar 4.5). Berdasarkan grafik, terlihat bahwa iuran normal dengan pendekatan tingkat suku bunga menggunakan model CIR cenderung lebih besar daripada iuran normal yang mengikuti tingkat suku bunga tetap namun perbedaan antar keduanya tidak begitu besar.



Gambar 4.5: Perbandingan Iuran Normal dengan Tingkat Suku Bunga Tetap dan Tingkat Suku Bunga CIR

Jika dilihat dari pihak penyelenggara dana pensiun, hal ini tentu akan menguntungkan pihak penyelenggara pendanaan pensiun karena dengan besar manfaat yang sama akan mendapatkan iuran normal yang lebih besar, sedangkan dilihat dari pihak peserta pensiun maka akan merugikan peserta karena harus membayar iuran normal lebih besar.

Hasil perhitungan dengan menggunakan model tingkat suku bunga CIR untuk asumsi tingkat suku bunga telah memenuhi keadaan yang sebenarnya yaitu tingkat suku bunga bergerak fluktuatif (berubah-ubah), sehingga dengan menggunakan asumsi yang menggambarkan keadaan sebenarnya akan meminimalisir kerugian untuk kedua belah pihak di kemudian hari.

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan dari hasil yang telah diperoleh pada analisis dan pembahasan. Selain itu, juga diberikan saran sebagai bahan pertimbangan untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

a. Hasil implementasi model CIR dalam mengaproksimasi tingkat suku bunga menunjukkan bahwa aproksimasi tingkat suku bunga berdasarkan model CIR cukup baik untuk data yang flutuasinya tidak terlalu besar. Hal ini berdasarkan, *error* yang kecil yang dihasilkan menunjukkan bahwa pola pergerakan hampir sama antara tingkat suku bunga hasil pendekatan dengan tingkat suku bunga pada pasar. Pada tingkat suku bunga aktuaria yang menggunakan tingkat suku bunga stokastik dalam penelitian terhadap pendanaan pensiun, lebih dapat menggambarkan keadaan sebenarnya dimana pada kenyataannya tingkat suku bunga selalu berubah-ubah mengikuti perekonomian negara.
b. Besar iuran normal dengan pendekatan tingkat suku bunga menggunakan model CIR cenderung lebih besar dibandingkan dengan asumsi tingkat suku bunga tetap. Namun dengan menggunakan pendekatan tingkat suku

bunga model CIR yang dapat menggambarkan kondisi pada realita maka akan meminimalisir kerugian untuk kedua belah pihak di masa datang.

5.2 Saran

Pada penelitian ini kenaikan gaji hanya dipengaruhi oleh masa kerja dan golongan dari peserta masuk sampai pensiun adalah sama. Untuk penelitian lebih lanjut disarankan untuk mempertimbangkan peluang kenaikan gaji dan pangkat golongan dalam perhitungan gaji. Penulis juga menyarankan untuk melakukan penelitian lebih lanjut mengenai jenis pensiun lain seperti pensiun karena cacat, pensiun dini, dan pensiun meninggal karena dalam penelitian ini masih terbatas pada pensiun normal saja.

DAFTAR PUSTAKA

[1] *Undang-Undang Republik Indonesia No.11 Tahun 1992 Tentang Dana Pensiun.*

[2] Bayazit, D., (2004). "Yield Curve Estimation and Prediction with Vasicek Model". *Thesis, School Of Applied Mathematics of The Middle East Technical University.*

[3] Noviyanti, L., (2006). *Life Insurance with Stochastic Interest Rate*. Disertasi, Institut Teknologi Bandung.

[4] Barokah, A.R.R., (2009). *Implementasi Model Cox Ingersoll Ross Dalam Mengaproksimasi Tingkat Bunga Harian dan Harga Zero Coupon Bond*. Universitas Indonesia.

[5] Oktiani, I., (2013). *Perhitungan Aktuaria Untuk Manfaat Pensiun Normal dengan Metode Projected Unit Credit dan Entry Age Normal*. Institut Pertanian Bogor.

[6] Soffan, R.M., (2011). "Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Berjangka Menggunakan Model Statistik Tingkat Suku Bunga". Prosiding Universitas Padjajaran, 1-10.

[7] Ghuan, G., Liang,Z., (2013). "Optimal Management of DC Pension Plan In a Stochastic Interest Rate and Stochastic Volality Framework". Elsevier. *Insurance: Mathematics and Economics*, 58-66.

[8] Brigo, D., Mercurio, F., (2006). *Interest Rate Models, Theory and Practice*. Springer, Finance, 897-900.

[9] Cox, J.C., Jonathan E.I, Stepehen A.R., (1985). 'A Theory of The Term Structure of Interest Rate'. *Econometrica*. J-Stor, 385-407.

[10] Bain, L.J, and Max, E., (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics, 2nd Edition*. PWS Kent Publishing Company, 501-502.

[11] Overbeck, L., Ryden, T., (1997). "Estimation in the Cox Ingersoll Ross Model". *Econometric Theory*. Cambridge University Press. Vol **13**, 430-461.

[12] Higham, D.J., (2001). "An Algorithmic Introduction to Numerical Solution of Stochastic Differential Equations". *Society for Industrial and Applied Mathematics*. SIAM **43**(3), 525-546.

[13] Lawrence, K.D., Klimberg R.K.,& Lawrence S.M., (2009). *Fundamental of Forecasting Using Excel*. Industial Press Inc, America. 59-60.

[14] Winklevoss, H.E., (1993). *Pension Mathematics with Numerical Illustration, 2nd Edition*. USA: Pension Research of Council of Wharton Scholl of The University of Pennsylvania.

[15] Dickson, D.C.M, Hardy, M.R., dan H.R. Waters. (2009). *Actuarial Mathematics For Life Contingent Risks*. Cambridge University Press, New York.

[16] *Peraturan Pemerintah No. 34 Tahun 2014 Mengenai Gaji PNS 2014*.

[17] Laporan Tahunan Taspen 2013 *Annual Report*. www.taspen.com/ diakses pada 01 Februari 2015.

[18] www.bi.go.id/BI Rate/diakses pada 01 Februari 2015.

LAMPIRAN

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN A
BI Rate Tahun 2007-2014

Bulan Tahun	BI Rate	Bulan Tahun	BI Rate	Bulan Tahun	BI Rate
Jan-07	9.50%	Sep	6.50%	Mei	5.75%
Feb	9.25%	Okt	6.50%	Jun	5.75%
Mar	9.00%	Nov	6.50%	Jul	5.75%
Apr	9.00%	Des	6.50%	Aug	5.75%
Mei	8.75%	Jan-10	6.50%	Sep	5.75%
Jun	8.50%	Feb	6.50%	Okt	5.75%
Jul	8.25%	Mar	6.50%	Nov	5.75%
Aug	8.25%	Apr	6.50%	Des	5.75%
Sep	8.25%	Mei	6.50%	Jan-13	5.75%
Okt	8.25%	Jun	6.50%	Feb	5.75%
Nov	8.25%	Jul	6.50%	Mar	5.75%
Des	8.00%	Aug	6.50%	Apr	5.75%
Jan-08	8.00%	Sep	6.50%	Mei	5.75%
Feb	8.00%	Okt	6.50%	Jun	6.00%
Mar	8.00%	Nov	6.50%	Jul	6.50%
Apr	8.00%	Des	6.50%	Aug	7.00%
Mei	8.25%	Jan-11	6.50%	Sep	7.25%
Jun	8.50%	Feb	6.75%	Okt	7.25%
Jul	8.75%	Mar	6.75%	Nov	7.50%
Aug	9.00%	Apr	6.75%	Des	7.50%
Sep	9.25%	Mei	6.75%	Jan-14	7.50%
Okt	9.50%	Jun	6.75%	Feb	7.50%
Nov	9.50%	Jul	6.75%	Mar	7.50%
Des	9.25%	Aug	6.75%	Apr	7.50%
Jan-09	8.75%	Sep	6.75%	Mei	7.50%
Feb	8.25%	Okt	6.50%	Jun	7.50%
Mar	7.75%	Nov	6.00%	Jul	7.50%
Apr	7.50%	Des	6.00%	Aug	7.50%
Mei	7.25%	Jan-12	6.00%	Sep	7.50%
Jun	7.00%	Feb	5.75%	Okt	7.50%
Jul	6.75%	Mar	5.75%	Nov	7.75%
Aug	6.50%	Apr	5.75%	Des	7.75%

Sumber: www.bi.go.id/BI Rate/diakses 01 Februari 2015

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN B
Hasil Implementasi Model CIR

Tabel B1: Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Jangka Waktu 2 Tahun

Data	Aproksimasi	Error	Relative Error
0.0950	0.0950	0.0000	0.0000
0.0925	0.1013	0.0088	0.0949
0.0900	0.0876	0.0024	0.0261
0.0900	0.0844	0.0056	0.0628
0.0875	0.0890	0.0015	0.0170
0.0850	0.0877	0.0027	0.0319
0.0825	0.0834	0.0009	0.0103
0.0825	0.0828	0.0003	0.0042
0.0825	0.0785	0.0040	0.0486
0.0825	0.0773	0.0052	0.0636
0.0825	0.0747	0.0078	0.0949
0.0800	0.0755	0.0045	0.0566
0.0800	0.0734	0.0066	0.0826
0.0800	0.0764	0.0036	0.0451
0.0800	0.0807	0.0007	0.0088
0.0800	0.0863	0.0063	0.0790
0.0825	0.0876	0.0051	0.0622
0.0850	0.0867	0.0017	0.0199
0.0875	0.0852	0.0023	0.0265
0.0900	0.0871	0.0029	0.0323
0.0925	0.0900	0.0025	0.0266
0.0950	0.0900	0.0050	0.0529
0.0950	0.0870	0.0080	0.0847
0.0925	0.0831	0.0094	0.1017
MAPE = 4.72%			

Lanjutan Lampiran B

Tabel B2: Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Jangka Waktu 5 Tahun

Data	Aproksimasi	Error	Relative Error
0.0950	0.0950	0.0000	0.0000
0.0925	0.0976	0.0051	0.0552
0.0900	0.0955	0.0055	0.0611
0.0900	0.0931	0.0031	0.0340
0.0875	0.0935	0.0060	0.0683
0.0850	0.0934	0.0084	0.0986
0.0825	0.0908	0.0083	0.1006
0.0825	0.0906	0.0081	0.0987
0.0825	0.0904	0.0079	0.0958
0.0825	0.0916	0.0091	0.1097
0.0825	0.0909	0.0084	0.1013
0.0800	0.0880	0.0080	0.1003
0.0800	0.0858	0.0058	0.0731
0.0800	0.0854	0.0054	0.0675
0.0800	0.0846	0.0046	0.0577
0.0800	0.0845	0.0045	0.0566
0.0825	0.0835	0.0010	0.0124
0.0850	0.0827	0.0023	0.0276
0.0875	0.0841	0.0034	0.0389
0.0900	0.0828	0.0072	0.0799
0.0925	0.0826	0.0099	0.1073
0.0950	0.0833	0.0117	0.1232
0.0950	0.0821	0.0129	0.1354
0.0925	0.0798	0.0127	0.1374
0.0875	0.0759	0.0116	0.1325
0.0825	0.0786	0.0039	0.0471
0.0775	0.0810	0.0035	0.0456
0.0750	0.0808	0.0058	0.0768
0.0725	0.0780	0.0055	0.0760
0.0700	0.0797	0.0097	0.1386

Lanjutan Lampiran B

Data	Aproksimasi	Error	Relative Error
0.0675	0.0787	0.0112	0.1661
0.0650	0.0785	0.0135	0.2084
0.0650	0.0775	0.0125	0.1927
0.0650	0.0781	0.0131	0.2013
0.0650	0.0791	0.0141	0.2162
0.0650	0.0765	0.0115	0.1777
0.0650	0.0765	0.0115	0.1775
0.0650	0.0748	0.0098	0.1509
0.0650	0.0739	0.0089	0.1375
0.0650	0.0726	0.0076	0.1171
0.0650	0.0706	0.0056	0.0860
0.0650	0.0686	0.0036	0.0560
0.0650	0.0675	0.0025	0.0392
0.0650	0.0691	0.0041	0.0629
0.0650	0.0683	0.0033	0.0513
0.0650	0.0675	0.0025	0.0378
0.0650	0.0672	0.0022	0.0339
0.0650	0.0651	0.0001	0.0015
0.0650	0.0679	0.0029	0.0450
0.0675	0.0682	0.0007	0.0102
0.0675	0.0692	0.0017	0.0252
0.0675	0.0705	0.0030	0.0438
0.0675	0.0714	0.0039	0.0580
0.0675	0.0734	0.0059	0.0876
0.0675	0.0728	0.0053	0.0780
0.0675	0.0708	0.0033	0.0495
0.0675	0.0682	0.0007	0.0098
0.0650	0.0659	0.0009	0.0134
0.0600	0.0666	0.0066	0.1107
0.0600	0.0654	0.0054	0.0908
0.0750	0.0675	0.0075	0.0999
0.0750	0.0667	0.0083	0.1113
0.0750	0.0695	0.0055	0.0728
0.0750	0.0669	0.0081	0.1083
0.0750	0.0659	0.0091	0.1213

Lanjutan Lampiran B

Data	Aproksimasi	Error	Relative Error
0.0750	0.0646	0.0104	0.1388
0.0750	0.0640	0.0110	0.1472
0.0750	0.0650	0.0100	0.1329
0.0750	0.0638	0.0112	0.1487
0.0775	0.0626	0.0149	0.1926
0.0775	0.0628	0.0147	0.1902
MAPE = 9.34%			

Tabel B3: Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga untuk Jangka Waktu 3 Tahun Berikutnya

Data	Aproksimasi	Error	Relative Error
0.0600	0.0600	0.0000	0.0000
0.0575	0.0628	0.0053	0.0926
0.0575	0.0578	0.0003	0.0060
0.0575	0.0574	0.0001	0.0016
0.0575	0.0562	0.0013	0.0222
0.0575	0.0567	0.0008	0.0142
0.0575	0.0573	0.0002	0.0033
0.0575	0.0640	0.0065	0.1128
0.0575	0.0629	0.0054	0.0938
0.0575	0.0631	0.0056	0.0975
0.0575	0.0606	0.0031	0.0544
0.0575	0.0620	0.0045	0.0781
0.0575	0.0598	0.0023	0.0392
0.0575	0.0589	0.0014	0.0249
0.0575	0.0608	0.0033	0.0577
0.0575	0.0638	0.0063	0.1094
0.0575	0.0645	0.0070	0.1223
0.0600	0.0649	0.0049	0.0822
0.0650	0.0666	0.0016	0.0241
0.0700	0.0662	0.0038	0.0544

Lanjutan Lampiran B

Data	Aproksimasi	Error	Relative Error
0.0725	0.0689	0.0036	0.0497
0.0725	0.0701	0.0024	0.0331
0.0750	0.0700	0.0050	0.0666
0.0750	0.0745	0.0005	0.0064
0.0750	0.0734	0.0016	0.0209
0.0750	0.0739	0.0011	0.0145
0.0750	0.0707	0.0043	0.0568
0.0750	0.0751	0.0001	0.0007
0.0750	0.0726	0.0024	0.0321
0.0750	0.0697	0.0053	0.0700
0.0750	0.0707	0.0043	0.0571
0.0750	0.0704	0.0046	0.0610
0.0750	0.0705	0.0045	0.0597
0.0750	0.0701	0.0049	0.0652
0.0775	0.0707	0.0068	0.0878
0.0775	0.0700	0.0075	0.0966
MAPE = 5.19%			

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN C
Hasil Simulasi Tingkat Suku Bunga CIR

t	**Tingkat Suku Bunga Model CIR (r(t))**	t	**Tingkat Suku Bunga Model CIR (r(t))**	t	**Tingkat Suku Bunga Model CIR(r(t))**
0	0.0980	34	0.1011	68	0.0717
1	0.1002	35	0.0947	69	0.0708
2	0.1071	36	0.0940	70	0.0808
3	0.0976	37	0.0709	71	0.0821
4	0.0970	38	0.0813	72	0.0808
5	0.0956	39	0.0719	73	0.0703
6	0.0923	40	0.0885	74	0.0913
7	0.0902	41	0.0814	75	0.0833
8	0.0889	42	0.0877	76	0.0780
9	0.0821	43	0.0777	77	0.0843
10	0.0858	44	0.0833	78	0.0766
11	0.0802	45	0.0808	79	0.0824
12	0.0781	46	0.0706	80	0.0917
13	0.0734	47	0.0746	81	0.0899
14	0.0768	48	0.0820	82	0.0976
15	0.0751	49	0.0811	83	0.0881
16	0.0816	50	0.0793	84	0.0772
17	0.0851	51	0.0718	85	0.0839
18	0.0753	52	0.0886	86	0.0637
19	0.0700	53	0.0740	87	0.0704
20	0.0802	54	0.0758	88	0.0688
21	0.0707	55	0.0726	89	0.0725
22	0.0907	56	0.0857	90	0.0650
23	0.0729	57	0.0780	91	0.0668
24	0.0798	58	0.0730	92	0.0686
25	0.0825	59	0.0737	93	0.0709
26	0.0855	60	0.0812	94	0.0604
27	0.0700	61	0.0760	95	0.0616
28	0.0781	62	0.0832	96	0.0525
29	0.0707	63	0.0911	97	0.0665
30	0.0744	64	0.0747	98	0.0797
31	0.0724	65	0.0909	99	0.0913
32	0.0780	66	0.0704		
33	0.0839	67	0.0805		

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN D
Tabel Penurunan Populasi Winklevoss

X	l_x	$d_x(m)$	$d_x(w)$	$d_x(d)$	$d_x(r)$	$d_x(\tau)$
20	1000000	442	243002	263	0	243707
21	756292	350	169718	201	0	170269
22	586023	286	121314	158	0	121758
23	464265	238	88543	126	0	88907
24	375358	202	65921	103	0	66226
25	309132	176	49933	85	0	50194
26	258938	156	38460	72	0	38688
27	220251	140	30049	62	0	30251
28	189999	129	23814	53	0	23996
29	166004	119	19113	47	0	19279
30	146724	112	15529	56	0	15697
31	131027	107	12754	50	0	12911
32	118116	103	10576	45	0	10724
33	107392	101	8875	41	0	9017
34	98375	99	7510	38	0	7647
35	90727	98	6419	35	0	6552
36	84176	98	5534	41	0	5673
37	78503	99	4816	46	0	4961
38	73543	100	4224	50	0	4374
39	69169	102	3738	54	0	3894
40	65276	104	3338	57	0	3499
41	61777	108	3004	60	0	3172
42	58605	114	2727	69	0	2910
43	55695	123	2491	76	0	2690
44	53006	133	2290	83	0	2506

Lanjutan Lampiran D

X	l_x	$d_x(m)$	$d_x(w)$	$d_x(d)$	$d_x(r)$	$d_x(\tau)$
45	50499	144	2121	89	0	2354
46	48145	156	1969	94	0	2219
47	45926	169	1841	99	0	2109
48	43818	181	1721	107	0	2009
49	41808	194	1616	115	0	1925
50	39884	206	1517	121	0	1844
51	38039	219	1424	127	0	1770
52	36270	230	1335	135	0	1700
53	34570	241	1244	142	0	1627
54	32942	252	1159	148	0	1559
55	31383	267	0	156	0	423
56	30960	286	0	166	0	452
57	30508	305	0	182	0	487
58	30020	326	0	203	0	529
59	29491	350	0	235	0	585
60	28907	377	0	281	0	658
61	28248	405	0	348	0	753
62	27495	433	0	436	0	869
63	26626	459	0	549	0	1008
64	25618	485	0	685	0	1170
65	24448	0	0	0	24448	24448

Sumber: *Winklevoss, H.E. 1993. Pension Mathematics with Numerical Illustrations, 2nd Edition*

LAMPIRAN E
Tabel Mortalita Taspen 2012

Usia	q_x	p_x	l_x
0	0.00426377	0.99573623	62336851
1	0.00049113	0.99950887	62071061
2	0.00038199	0.99961801	62040576
3	0.00030559	0.99969441	62016877
4	0.0002583	0.9997417	61997925
5	0.00023647	0.99976353	61981911
6	0.00023283	0.99976717	61967255
7	0.00022556	0.99977444	61952827
8	0.00021464	0.99978536	61938853
9	0.00020373	0.99979627	61925558
10	0.00018918	0.99981082	61912942
11	0.00018554	0.99981446	61901229
12	0.00020218	0.99979782	61889744
13	0.00022031	0.99977969	61877231
14	0.00024007	0.99975993	61863599
15	0.0002616	0.9997384	61848747
16	0.00028507	0.99971493	61832568
17	0.00031063	0.99968937	61814941
18	0.00033849	0.99966151	61795740
19	0.00036884	0.99963116	61774822
20	0.00040192	0.99959808	61752037
21	0.00043797	0.99956203	61727218
22	0.00047724	0.99952276	61700183
23	0.00052004	0.99947996	61670738
24	0.00056667	0.99943333	61638666
25	0.00061748	0.99938252	61603737
26	0.00067285	0.99932715	61565698
27	0.00073318	0.99926682	61524274
28	0.00079892	0.99920108	61479166
29	0.00087055	0.99912945	61430049
30	0.0009486	0.9990514	61376571

Lanjutan Lampiran E

Usia	q_x	p_x	l_x
31	0.00103364	0.99896636	61318349
32	0.00112630	0.9988737	61254968
33	0.00122727	0.99877273	61185976
34	0.00133728	0.99866272	61110885
35	0.00145714	0.99854286	61029162
36	0.00158774	0.99841226	60940234
37	0.00173003	0.99826997	60843477
38	0.00188506	0.99811494	60738216
39	0.00205398	0.99794602	60623721
40	0.00223801	0.99776199	60499201
41	0.0024385	0.9975615	60363803
42	0.00265694	0.99734306	60216606
43	0.00289492	0.99710508	60056614
44	0.00315417	0.99684583	59882755
45	0.00343661	0.99656339	59693874
46	0.00374428	0.99625572	59488730
47	0.00407945	0.99592055	59265987
48	0.00444455	0.99555545	59024215
49	0.00484225	0.99515775	58761879
50	0.00527544	0.99472456	58477339
51	0.00574727	0.99425273	58168845
52	0.00626117	0.99373883	57834533
53	0.00682086	0.99317914	57472421
54	0.00743039	0.99256961	57080410
55	0.00809417	0.99190583	56656280
56	0.00881699	0.99118301	56197695
57	0.00960404	0.99039596	55702200
58	0.01046098	0.98953902	55167234
59	0.01139393	0.98860607	54590131
60	0.01240957	0.98759043	53968135
61	0.01351512	0.98648488	53298413
62	0.01471843	0.98528157	52578079
63	0.016028	0.983972	51804212
64	0.01745305	0.98254695	50973894

Lanjutan Lampiran E

Usia	q_x	p_x	l_x
65	0.01900358	0.98099642	50084244
66	0.0206904	0.9793096	49132464
67	0.02252522	0.97747478	48115894
68	0.0245207	0.9754793	47032073
69	0.02669054	0.97330946	45878814
70	0.02904951	0.97095049	44654283
71	0.03172822	0.96827178	43357098
72	0.03505881	0.96494119	41981455
73	0.03857564	0.96142436	40509635
74	0.04233899	0.95766101	38946950
75	0.04648031	0.95351969	37297975
76	0.05099961	0.94900039	35564354
77	0.05612148	0.94387852	33750586
78	0.0619774	0.9380226	31856453
79	0.06860023	0.93139977	29882073
80	0.07583658	0.92416342	27832156
81	0.08465607	0.91534393	25721460
82	0.09406716	0.90593284	23543982
83	0.10390006	0.89609994	21329267
84	0.11475734	0.88524266	19113155
85	0.12690193	0.87309807	16919780
86	0.13941902	0.86058098	14772627
87	0.15481203	0.84518797	12713042
88	0.17113628	0.82886372	10744910
89	0.1884137	0.8115863	8906066
90	0.20541175	0.79458825	7228041
91	0.21846568	0.78153432	5743317
92	0.23527747	0.76472253	4488599
93	0.25573757	0.74426243	3432533
94	0.2793694	0.7206306	2554705
95	0.30669336	0.69330664	1840999
96	0.33209456	0.66790544	1276377
97	0.35875021	0.64124979	852498.9
98	0.37353517	0.62646483	546664.8

Lanjutan Lampiran E

Usia	q_x	p_x	l_x
99	0.3953538	0.6046462	342466.2
100	0.42297904	0.57702096	207070.9
101	0.44870892	0.55129108	119484.3
102	0.47665736	0.52334264	65870.61
103	0.50701062	0.49298938	34472.9
104	0.53995495	0.46004505	16994.77
105	0.57534791	0.42465209	7818.361
106	0.61216513	0.38783487	3320.083
107	0.65047784	0.34952216	1287.644
108	0.68992995	0.31007005	450.0601
109	0.73138152	0.26861848	139.5502
110	0.77448194	0.22551806	37.48575
111	1	0	8.453714

LAMPIRAN F
Daftar Gaji PNS Golongan 3

MKG	Golongan			
	3A	**3B**	**3C**	**3D**
0	2.317.600	2.415.600	2.517.800	2.624.300
1	2.317.600	2.415.600	2.517.800	2.624.300
2	2.390.600	2.491.700	2.597.100	2.706.900
3	2.390.600	2.491.700	2.597.100	2.706.900
4	2.465.900	2.570.200	2.678.900	2.792.200
5	2.465.900	2.570.200	2.678.900	2.792.200
6	2.543.500	2.651.100	2.763.300	2.880.100
7	2.543.500	2.651.100	2.763.300	2.880.100
8	2.623.600	2.734.600	2.850.300	2.970.800
9	2.623.600	2.734.600	2.850.300	2.970.800
10	2.706.300	2.820.700	2.940.000	3.064.400
11	2.706.300	2.820.700	2.940.000	3.064.400
12	2.791.500	2.909.600	3.032.600	3.160.900
13	2.791.500	2.909.600	3.032.600	3.160.900
14	2.879.400	3.001.200	3.128.200	3.260.500
15	2.879.400	3.001.200	3.128.200	3.260.500
16	2.970.100	3.095.700	3.226.700	3.363.200
17	2.970.100	3.095.700	3.226.700	3.363.200
18	3.063.600	3.193.200	3.328.300	3.469.100
19	3.063.600	3.193.200	3.328.300	3.469.100
20	3.160.100	3.293.800	3.433.100	3.578.400
21	3.160.100	3.293.800	3.433.100	3.578.400
22	3.259.700	3.397.500	3.541.300	3.691.100
23	3.259.700	3.397.500	3.541.300	3.691.100
24	3.362.300	3.504.500	3.652.800	3.807.300
25	3.362.300	3.504.500	3.652.800	3.807.300
26	3.468.200	3.614.900	3.767.800	3.927.200
27	3.468.200	3.614.900	3.767.800	3.927.200
28	3.577.400	3.728.800	3.886.500	4.050.900
29	3.577.400	3.728.800	3.886.500	4.050.900
30	3.690.100	3.846.200	4.008.900	4.178.500
31	3.690.100	3.846.200	4.008.900	4.178.500
32	3.806.300	3.967.300	4.135.200	4.310.100
33	3.806.300	3.967.300	4.135.200	4.310.100

Sumber: *Peraturan Pemerintah No.34 Tahun 2014 Mengenai Gaji PNS 2014*

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN G
Perhitungan Anuitas

Tabel G1: Perhitungan Anuitas dengan $r(t)$ CIR

Usia (x)	**r(t) CIR**	v^t	p_x	$\ddot{a}$
58	0.0839	1	1	1
59	0.1011	0.9226	0.9895	0.91293
60	0.0947	0.8379	0.9783	0.81966
61	0.0940	0.7654	0.9661	0.73948
62	0.0709	0.6996	0.9531	0.66680
63	0.0813	0.6533	0.9390	0.61352
64	0.0719	0.6042	0.9240	0.55831
65	0.0885	0.5637	0.9079	0.51179
66	0.0814	0.5179	0.8906	0.46123
67	0.0877	0.4789	0.8722	0.41768
68	0.0777	0.4403	0.8525	0.37535
69	0.0833	0.4085	0.8316	0.33976
70	0.0808	0.3771	0.8094	0.30525
71	0.0706	0.3489	0.7859	0.27424
72	0.0746	0.3259	0.7610	0.24803
73	0.0820	0.3033	0.7343	0.22272
74	0.0811	0.2803	0.7060	0.19790
75	0.0793	0.2593	0.6761	0.17530
76	0.0718	0.2402	0.6447	0.15487
77	0.0886	0.2241	0.6118	0.13712
78	0.0740	0.2059	0.5775	0.11890
79	0.0758	0.1917	0.5417	0.10384
80	0.0726	0.1782	0.5045	0.08990
81	0.0857	0.1661	0.4662	0.07746
82	0.0780	0.1530	0.4268	0.06531
83	0.0730	0.1420	0.3866	0.05488
84	0.0737	0.1323	0.3465	0.04583
85	0.0812	0.1232	0.3067	0.03779

Lanjutan Lampiran G

Usia (x)	**r(t) CIR**	v^t	p_x	$\ddot{a}$
86	0.0760	0.1140	0.2678	0.03052
87	0.0832	0.1059	0.2304	0.02441
88	0.0911	0.0978	0.1948	0.01904
89	0.0747	0.0896	0.1614	0.01447
90	0.0909	0.0834	0.1310	0.01093
91	0.0704	0.0764	0.1041	0.00796
92	0.0805	0.0714	0.0814	0.00581
93	0.0717	0.0661	0.0622	0.00411
94	0.0708	0.0617	0.0463	0.00286
95	0.0808	0.0576	0.0334	0.00192
96	0.0821	0.0533	0.0231	0.00123
97	0.0808	0.0492	0.0155	0.00076
98	0.0703	0.0456	0.0099	0.00045
99	0.0913	0.0426	0.0062	0.00026
100	0.0833	0.0390	0.0038	0.00015
101	0.0780	0.0360	0.0022	7.79885E-05
102	0.0843	0.0334	0.0012	3.98826E-05
103	0.0766	0.0308	0.0006	1.92492E-05
104	0.0824	0.0286	0.0003	8.81443E-06
105	0.0917	0.0264	0.0001	3.74642E-06
106	0.0899	0.0242	6.01822E-05	1.45733E-06
107	0.0976	0.0222	2.33407E-05	5.18598E-07
108	0.0881	0.0202	8.15811E-06	1.65149E-07
109	0.0772	0.0186	2.52958E-06	4.7063E-08
110	0.0839	0.0173	6.79493E-07	1.17357E-08
Jumlah				9.8508

Lanjutan Lampiran G

Tabel G2: Perhitungan Anuitas dengan $r(t)$ Tetap

Usia (x)	**r(t) Tetap**	v^t	p_x	$\ddot{a}$
58	0.098	1	1	1
59	0.098	0.9107	0.98954	0.9012
60	0.098	0.8295	0.97826	0.8114
61	0.098	0.7554	0.96612	0.7298
62	0.098	0.6880	0.95307	0.6557
63	0.098	0.6266	0.93904	0.5884
64	0.098	0.5707	0.92399	0.5273
65	0.098	0.5197	0.90786	0.4718
66	0.098	0.4733	0.89061	0.4216
67	0.098	0.4311	0.87218	0.3760
68	0.098	0.3926	0.85254	0.3347
69	0.098	0.3576	0.83163	0.2974
70	0.098	0.3257	0.80943	0.2636
71	0.098	0.2966	0.78592	0.2331
72	0.098	0.2701	0.76099	0.2056
73	0.098	0.2460	0.73431	0.1807
74	0.098	0.2241	0.70598	0.1582
75	0.098	0.2041	0.67609	0.1380
76	0.098	0.1858	0.64466	0.1198
77	0.098	0.1693	0.61179	0.1036
78	0.098	0.1542	0.57745	0.0890
79	0.098	0.1404	0.54166	0.0760
80	0.098	0.1279	0.50451	0.0645
81	0.098	0.1165	0.46625	0.0543
82	0.098	0.1061	0.42677	0.0453
83	0.098	0.0966	0.38663	0.0373
84	0.098	0.0880	0.34646	0.0305
85	0.098	0.0801	0.30670	0.0246
86	0.098	0.0730	0.26778	0.0195
87	0.098	0.0665	0.23045	0.0153
88	0.098	0.0605	0.19477	0.0118
89	0.098	0.0551	0.16144	0.0089

Lanjutan Lampiran G

Usia (x)	**r(t) Tetap**	v^t	p_x	$\ddot{a}$
90	0.098	0.0502	0.13102	0.0066
91	0.098	0.0457	0.10411	0.0048
92	0.098	0.0416	0.08136	0.0034
93	0.098	0.0379	0.06222	0.0024
94	0.098	0.0345	0.04631	0.0016
95	0.098	0.0315	0.03337	0.0010
96	0.098	0.0286	0.02314	0.0007
97	0.098	0.0261	0.01545	0.0004
98	0.098	0.0238	0.00991	0.0002
99	0.098	0.0216	0.00621	0.0001
100	0.098	0.0197	0.00375	7.39843E-05
101	0.098	0.0180	0.00217	3.88802E-05
102	0.098	0.0163	0.00119	1.95212E-05
103	0.098	0.0149	0.00062	9.30446E-06
104	0.098	0.0136	0.00031	4.1776E-06
105	0.098	0.0124	0.00014	1.75035E-06
106	0.098	0.0112	6.01822E-05	6.76948E-07
107	0.098	0.0102	2.33407E-05	2.39111E-07
108	0.098	0.0093	8.15811E-06	7.61154E-08
109	0.098	0.0085	2.52958E-06	2.14946E-08
110	0.098	0.0077	6.79493E-07	5.25852E-09
Jumlah				9.01622

LAMPIRAN H
Perhitungan Iuran Normal

Tabel H1: Iuran Normal dengan Tingkat Suku Bunga Tetap

Usia (x)	b_x (Rupiah)	$\ddot{a}_r$	v^t	p_x	**Iuran Normal** (Rupiah)
25	877,034.39	9.0162	0.0457	0.09711	35,110.01
26	877,034.39	9.0162	0.0502	0.11594	46,023.69
27	904,657.25	9.0162	0.0551	0.13630	61,281.46
28	904,657.25	9.0162	0.0605	0.15800	78,000.62
29	933,150.94	9.0162	0.0665	0.18084	101,111.60
30	933,150.94	9.0162	0.0730	0.20460	125,608.98
31	962,550.29	9.0162	0.0801	0.22911	159,307.03
32	962,550.29	9.0162	0.0880	0.25416	194,039.14
33	992,855.32	9.0162	0.0966	0.27954	241,707.99
34	992,855.32	9.0162	0.1061	0.30516	289,721.38
35	1,024,100.84	9.0162	0.1165	0.33088	355,785.16
36	1,024,100.84	9.0162	0.1279	0.35663	421,054.62
37	1,056,356.54	9.0162	0.1404	0.38241	511,340.99
38	1,056,356.54	9.0162	0.1542	0.40820	599,318.75
39	1,089,657.23	9.0162	0.1693	0.43401	721,721.14
40	1,089,657.23	9.0162	0.1858	0.45989	839,710.79
41	1,123,968.09	9.0162	0.2041	0.48594	1,004,900.05
42	1,123,968.09	9.0162	0.2241	0.51224	1,163,100.80
43	1,159,358.79	9.0162	0.2460	0.53901	1,386,123.83
44	1,159,358.79	9.0162	0.2701	0.56635	1,599,173.36
45	1,195,864.15	9.0162	0.2966	0.59447	1,901,096.36
46	1,195,864.15	9.0162	0.3257	0.62353	2,189,465.25
47	1,233,553.85	9.0162	0.3576	0.65366	2,599,616.19
48	1,233,553.85	9.0162	0.3926	0.68511	2,991,697.25
49	1,272,393.05	9.0162	0.4311	0.71804	3,551,209.68
50	1,272,393.05	9.0162	0.4733	0.75268	4,087,326.60
51	1,312,451.41	9.0162	0.5197	0.78919	4,853,703.53

Lanjutan Lampiran H

Usia (x)	b_x (Rupiah)	$\ddot{a}_r$	v^t	p_x	**Iuran Normal** (Rupiah)
52	1,312,451.41	9.0162	0.5707	0.82768	5,589,296.15
53	1,353,798.62	9.0162	0.6266	0.86838	6,641,687.96
54	1,353,798.62	9.0162	0.6880	0.91130	7,652,973.76
55	1,396,434.65	9.0162	0.7554	0.95657	9,098,182.03
56	1,396,434.65	9.0162	0.8295	0.96964	10,126,292.47
57	1,440,429.19	9.0162	0.9107	0.98400	11,638,883.39

Tabel H2: Iuran Normal dengan Tingkat Suku Bunga CIR

Usia (x)	b_x (Rupiah)	$\ddot{a}_r$	v^t	p_x	**Iuran Normal** (Rupiah)
25	877,034.39	9.8509	0.0667	0.09711	55,948.95
26	877,034.39	9.8509	0.0732	0.11594	73,340.26
27	904,657.25	9.8509	0.0806	0.13630	97,850.39
28	904,657.25	9.8509	0.0892	0.15800	125,577.01
29	933,150.94	9.8509	0.0979	0.18084	162,725.48
30	933,150.94	9.8509	0.1074	0.20460	201,965.91
31	962,550.29	9.8509	0.1176	0.22911	255,577.54
32	962,550.29	9.8509	0.1285	0.25416	309,677.51
33	992,855.32	9.8509	0.1401	0.27954	383,003.93
34	992,855.32	9.8509	0.1525	0.30516	455,267.56
35	1,024,100.84	9.8509	0.1651	0.33088	550,961.99
36	1,024,100.84	9.8509	0.1792	0.35663	644,772.34
37	1,056,356.54	9.8509	0.1936	0.38241	770,369.31
38	1,056,356.54	9.8509	0.2087	0.40820	886,532.50
39	1,089,657.23	9.8509	0.2240	0.43401	1,043,647.77
40	1,089,657.23	9.8509	0.2412	0.45989	1,190,877.47
41	1,123,968.09	9.8509	0.2594	0.48594	1,395,471.16
42	1,123,968.09	9.8509	0.2805	0.51224	1,591,092.88
43	1,159,358.79	9.8509	0.3044	0.53901	1,873,829.23
44	1,159,358.79	9.8509	0.3273	0.56635	2,117,181.08
45	1,195,864.15	9.8509	0.3502	0.59447	2,452,727.96

Lanjutan Lampiran H

Usia (x)	b_x (Rupiah)	$\ddot{a}_r$	v^t	p_x	**Iuran Normal** (Rupiah)
46	1,195,864.15	9.8509	0.3783	0.62353	2,778,958.33
47	1,233,553.85	9.8509	0.4051	0.65366	3,217,432.40
48	1,233,553.85	9.8509	0.4418	0.68511	3,678,023.34
49	1,272,393.05	9.8509	0.4740	0.71804	4,266,090.46
50	1,272,393.05	9.8509	0.5118	0.75268	4,828,896.34
51	1,312,451.41	9.8509	0.5541	0.78919	5,653,180.88
52	1,312,451.41	9.8509	0.6014	0.82768	6,435,616.60
53	1,353,798.62	9.8509	0.6435	0.86838	7,452,548.85
54	1,353,798.62	9.8509	0.6938	0.91130	8,431,498.67
55	1,396,434.65	9.8509	0.7428	0.95657	9,774,464.40
56	1,396,434.65	9.8509	0.7980	0.96964	10,644,691.07
57	1,440,429.19	9.8509	0.8558	0.98400	11,949,003.61

Tabel H3: Iuran Normal dengan Tingkat Suku Bunga CIR dan Tingkat Suku Bunga Tetap

Usia	***Accrual Benefit***	**Tingkat Suku Bunga Tetap**	**Tingkat Suku Bunga CIR**
25	877,034.39	35,110.01	55,948.95
26	877,034.39	46,023.69	73,340.26
27	904,657.25	61,281.46	97,850.39
28	904,657.25	78,000.62	125,577.01
29	933,150.94	101,111.60	162,725.48
30	933,150.94	125,608.98	201,965.91
31	962,550.29	159,307.03	255,577.54
32	962,550.29	194,039.14	309,677.51
33	992,855.32	241,707.99	383,003.93
34	992,855.32	289,721.38	455,267.56
35	1,024,100.84	355,785.16	550,961.99
36	1,024,100.84	421,054.62	644,772.34
37	1,056,356.54	511,340.99	770,369.31
38	1,056,356.54	599,318.75	886,532.50
39	1,089,657.23	721,721.14	1,043,647.77
40	1,089,657.23	839,710.79	1,190,877.47
41	1,123,968.09	1,004,900.05	1,395,471.16
42	1,123,968.09	1,163,100.80	1,591,092.88
43	1,159,358.79	1,386,123.83	1,873,829.23
44	1,159,358.79	1,599,173.36	2,117,181.08
45	1,195,864.15	1,901,096.36	2,452,727.96
46	1,195,864.15	2,189,465.25	2,778,958.33
47	1,233,553.85	2,599,616.19	3,217,432.40
48	1,233,553.85	2,991,697.25	3,678,023.34
49	1,272,393.05	3,551,209.68	4,266,090.46
50	1,272,393.05	4,087,326.60	4,828,896.34
51	1,312,451.41	4,853,703.53	5,653,180.88
52	1,312,451.41	5,589,296.15	6,435,616.60
53	1,353,798.62	6,641,687.96	7,452,548.85
54	1,353,798.62	7,652,973.76	8,431,498.67
55	1,396,434.65	9,098,182.03	9,774,464.40
56	1,396,434.65	10,126,292.47	10,644,691.07
57	1,440,429.19	11,638,883.39	11,949,003.61

LAMPIRAN I
***LISTING* PROGRAM MODEL CIR**

- **Estimasi.m**

```
clear;
clc;

fprintf('-----------------------------------\n');
fprintf('\t ESTIMASI PARAMETER MODEL CIR
\t\t\n');
fprintf('\t DENGAN CONDITIONAL LEAST SQUARE
ESTIMATION \t\t\n');
fprintf('---------------------------------\n\n');

data=xlsread('Rate.xlsx');
delta_t=1;
r=data
n=length(r)
r=r';
r0=0.098;
sum_rk=sum(r)
r=[r0 r];
sum_rkmin1=sum(r)-r(length(r))
sum_rkmin12=sum_rkmin1^2
sum1=0;sum2=0;sum3=0;
for k=3:length(r)+1
    sum1=sum1+r(k-1)*r(k-2);
    sum2=sum2+r(k-2)^2;
end
sum1,sum2
nilai_sigma=(-1/delta_t)*log(((n*sum1)-
(sum_rk*sum_rkmin1))/((n*sum2)-sum_rkmin12))
nilai_miu=(sum_rk-(exp(-
nilai_sigma*delta_t)*sum_rkmin1))/(n*(1-exp(-
nilai_sigma*delta_t)))
```

```
for k=3:size(r,2)
    sum3=sum3+(r(k-1)-nilai_miu+(nilai_miu*exp(-
nilai_sigma*delta_t))+(exp(-
nilai_sigma*delta_t)*r(k-2)))^2/...
    ((r(k-2)*(exp(-nilai_sigma*delta_t)-exp(-
2*nilai_sigma*delta_t))/nilai_sigma)+...
    ((1-2*exp(-nilai_sigma*delta_t)+exp(-
2*nilai_sigma*delta_t))*nilai_miu/2*nilai_sigma)
);
end
sum3
nilai_alpha=sqrt(sum3/n)
```

- **milstein.m**

```
clear;
clc;

fprintf('----------------------------------\n');
fprintf('\t Implementasi Model CIR Untuk
Mengaproksimasi Tingkat Suku Bunga \t\t\n');
fprintf('--------------------------------\n\n');

semuadata=xlsread('Rate.xlsx')
data=semuadata
simul=100;

alfa =input('Masukkan nilai alfa : ');
miu =input('Masukkan nilai miu : ');
sigma = input('Masukkan nilai sigma : ');
Rzero =input('Masukkan nilai tingkat suku bunga
awal : ');

for y=1:simul
    randn('state', sum(100*clock))
    T=8; N=length(data); dt=T/N;
    dW=sqrt(dt)*randn(simul,N);
```

```
    W=cumsum(dW);

    S=1; Dt=S*dt; L=N/S;
    Rtemp=Rzero;

    for j=1:(L-1)
        Winc=sum(dW(S*(j-1)+1:S*j));
        Rtemp=Rtemp+Dt*(alfa*(miu-
Rtemp))+sigma*(sqrt(Rtemp))*Winc +
(1/4)*((sigma)^2)*(((Winc)^2)-Dt);
        Rm(y,j)=Rtemp;
    end
    Rm;
    aproks=Rm';
end
aproks;
for m=1:(L-1)
    Rata2(m)=mean(aproks(m,:));
end

Rata2=[Rzero Rata2];
R=Rata2'

data;
error=abs(data-R);
relative_error=error./data;
for i=1:length(data)
    B(i) = abs((data(i)-R(i)))/data(i);
end

[data R error relative_error]
MAPE=mean(B)

figure(1)
plot([0:Dt:(T-Dt)],R,'r-',[0:Dt:(T-
Dt)],data','b-');
xlabel('t','FontSize',12)
```

```
ylabel('R','FontSize',12,'Rotation',
0,'HorizontalAlignment','right')
title('Implementasi Model CIR')
legend('Aproksimasi','Actual')
```

- **mil.m**

```
clear;
clc;

fprintf('----------------------------------\n');
fprintf('\t Implementasi Model CIR
Mengaproksimasi Tingkat Suku Bunga Untuk Iuran
Normal \t\t\n');
fprintf('--------------------------------\n\n');

simul=100; %banyak simulasi yang dilakukan

alfa = input('Masukkan nilai alpha : ');
miu = input('Masukkan nilai miu : ');
sigma = input('Masukkan nilai sigma : ');
Rzero = input('Masukkan nilai tingkat suku bunga
awal : ');

fprintf('Note: besar T dan N harus sama \n');
T = input('Masukkan banyak periode waktu
pendekatan (tahun) : ');
N = input('Masukkan banyak titik data : ');

for y=1:simul
    randn('state', sum(100*clock)) %bil. random
    dt=T/N;
    dW=sqrt(dt)*randn(simul,N);
    W=cumsum(dW);
    S=1; Dt=S*dt; L=N/S;
    Rtemp=Rzero;
    for j=1:(L-1)
```

```
        Winc=sum(dW(S*(j-1)+1:S*j));
        Rtemp=Rtemp+Dt*(alfa*(miu-
Rtemp))+sigma*(sqrt(Rtemp))*Winc+(1/4)*((sigma)^
2)*(((Winc)^2)-Dt);
        Rm(j)=Rtemp;
    end
    Rm
    aproks=Rm';
end
for m=1:(L-1)
    Rata2(m)=mean(aproks(m,:));
end
Rata2=[Rzero Rata2];
R=Rata2';
R
A=mean(R)
y=1:1:N;
AMr(1:length(y))=A;
plot(y',R);
hold on
plot(y',AMr','--r');

xlabel ('Waktu (dalam tahun)','FontSize',12)
ylabel ('Tingkat Suku Bunga CIR','FontSize',12)
title ('Simulasi Tingkat Suku Bunga CIR')
legend ('Suku Bunga','Rata-Rata')
```

LAMPIRAN J
Biodata Penulis

Penulis bernama Zebrilia Dwi Nastiti, lahir di Surabaya, 02 April 1993. Penulis merupakan anak ke-2 dari 3 bersaudara dari pasangan Suwardi dan Mining Suharwati. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Khoirul Huda Pabean (1998-1999), SDN Pabean 1 Sedati (1999-2005), SMP Negeri 1 Waru (2005-2008), dan SMA Negeri 1 Waru (2008-2011). Setelah lulus dari SMA, pada tahun 2011 penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya melalui jalur penerimaan mahasiswa undangan dengan NRP 1211 100 034. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selain aktif kuliah, penulis juga aktif berorganisasi di KM ITS melalui HIMATIKA ITS sebagai staf Depart. Keilmiahan (2012-2013) dan Ketua Divisi SAINSTEK (2013-2014). Tidak hanya HIMATIKA, penulis juga aktif di Lembaga Dakwah Jurusan (LDJ) Ibnu Muqlah sebagai Sekretaris Departemen Syiar. Selain itu, penulis juga aktif berorganisasi di KOPMA ITS sebagai Asisten Direktur Personalia.

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: zebrilia.dwin@gmail.com